Tartalomjegyzék

- 1 Laurent-sorfejtés
- 2 Komplex egyenlet
- 3 Harmonikus társkeresés
- 4 Reziduum és körintegrál

Laurent-sorfejtés

1. a Határozzuk meg az

$$f(z) = \frac{2}{(z-2i)(z-4)}$$

függvény 1 körüli Laurent-sorait! Melyik sor állítja el? a függvényt a 3+2i pontban?

Mo. **Parciális törtekre bontás**. Mivel z-2i-(z-4)=-2i+4, ezért

$$f(z) = 2\frac{1}{(z-2i)(z-4)} = 2\left(\frac{1/(-2i+4)}{z-4} - \frac{1/(-2i+4)}{z-2i}\right)$$

és valóban, mert

$$\frac{1}{-2i+4}(z-2i-(z-4)) = \frac{-2i+4}{-2i+4} = 1$$

azaz

$$f(z) = 2\frac{1}{(z-2i)(z-4)} = \frac{1/(-i+2)}{z-4} - \frac{1/(-i+2)}{z-2i}$$

A sort a $z_0 = 1$ körül kell sorba fejteni, azaz a $z - 1$ hatványai szerepelnek majd az összegben. Ehhez z-1-nek szerepelnie kell a nevez?kben:

$$f(z) = \frac{\frac{1}{-i+2}}{z-1+1-4} - \frac{\frac{1}{-i+2}}{z-1+1-2i} = \frac{\frac{1}{-i+2}}{z-1-3} - \frac{\frac{1}{-i+2}}{z-1+1-2i}$$

Két szingularitás: $z = 4$ és $z = 2i$. Ezeknek a távolsága a középponttól:

|1-4|=3 és
$|1-2i| = \sqrt{5}$.

A sorfejtés középpontja, az 1 körül tehát három olyan körgy?r? rajzolható, melyben reguláris lesz a függvény:

I.) |z-1|<|2i-1|, azaz $|z-1| < \sqrt{5}$

II.) |2i-1|<|z-1|<|4-1|, azaz $\sqrt{5} < |z-1| < 3$ és
III.) 3<|z-1|.

A 3+2i pont a II. tartományba esik, mert a sorfejtés középpontjától való távolsága:

$$\sqrt{5} < |3+2i-1| = \sqrt{8} < 3$$

I.) A $|z-1| < \sqrt{5}$ körlap,

melyen belül a sor reguláris és $z-1$-nek csak nemnegatív hatványai szerepelnek a sorban. Ilyenkor "http://wiki.math.bme.hu$z-1$ melletti tagból csinálunk mértani sort"http://wiki.math.bme.hu:

$$\frac{\frac{1}{-i+2}}{z-1-3}-\frac{\frac{1}{-i+2}}{z-1+1-2i} = \frac{1}{-3}\cdot\frac{\frac{1}{-i+2}}{\frac{z-1}{-3}+1}-\frac{1}{1-2i}\cdot\frac{\frac{1}{-i+2}}{\frac{z-1}{1-2i}+1} = \frac{1}{-3}\cdot\frac{\frac{1}{-i+2}}{1-\frac{z-1}{3}}-\frac{1}{1-2i}\cdot 1$$

Alkalmazva a

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

formulát, ha | q | < 1 a

$$\frac{z-1}{3} = q_1 \text{ és } \frac{z-1}{2i-1} = q_2$$

hányadosokra kapjuk:

$$f(z) = \frac{1}{-3}\frac{1}{-i+2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n-\frac{1}{1-2i}\frac{1}{-i+2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2i-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3i-6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n (z$$

II.) A $\sqrt{5} \leq |z-1| < 3$ körgy?r?,

melyben az els? tag reguláris, de a második már nem. Ilyenkor "http://wiki.math.bme.hua z-1-et emeljük ki a nevez?b?l"http://wiki.math.bme.hu:

$$\frac{1/(-i+2)}{z-2i} = \frac{1/(-i+2)}{z-1+1-2i} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{-i+2}\frac{1}{1+\frac{1-2i}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{-i+2}\frac{1}{1-\frac{2i-1}{z-1}} = \frac{1}{z-}$$

Tehát itt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3i-6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n (z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i-1)^n}{-i+2}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

III.) Végül a |z-1|>3 körgy?r?n

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3i-6}\cdot\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i-1)^n}{-i+2}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

1. b Fejtsük sorba a 0 körül az

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$

függvényt! Melyik sor állítja el? a függvényt az 1+2i-ben?

Mo. **A szingularitások:** 0, +i, -i. A sorfejtés középpontja, a nulla körül tehát két olyan körgy?r? rajzolható, melyben reguláris lesz a függvény: I.) 0<|z|<1 és II.) |z|>1. Az 1+2i pont a II. tartományba esik, mert $1 < |1+2i|\sqrt{5}$. A függvényt nem kell parciális törtekre bontani, mert 1/z szorzótényez?ként szerepel és a második tényez? pont mértani sor alakú q=-z^2-tel.

I.) 0<|z|<1. "http://wiki.math.bme.huEkkor az nevez?beli 1-ból kell 1-et csinálni"http://wiki.math.bme.hu:

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(-z^2)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1}$$

És a konvergencia tartománya valóban:

$$|-z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$$ ($z \neq 0$)

II.) 1<|z|. "http://wiki.math.bme.huEkkor az nevez?beli z^2-b?l kell 1-et csinálni"http://wiki.math.bme.hu:

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z^2}+1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{-1}{z^2}} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-2n-3}$$

És a konvergencia tartománya valóban:

$$|-1/z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$$

Komplex egyenlet

2. a) Oldjuk meg az

$$e^{\frac{i}{z}} = \sqrt{3}+i$$

egyenletet!

Mo.

$$\sqrt{3}+i = e^{\ln 2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

mert a szöge 30 fok, a hossza 2. Ezért az egyenlet:

$$e^{\frac{i}{z}} = e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{6}}$$

azaz

$$\frac{i}{z} = \ln 2 + i\frac{\pi}{6} + 2\pi i k$$

$$z = \frac{1}{\frac{\ln 2}{i} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k}$$

2. b) Oldjuk meg a

$$\cos z = 2i$$

egyenletet!

Mo.

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = 2i$$
$$e^z + e^{-z} = 4i$$
$$(e^z)^2 - 4ie^z + 1 = 0$$
$$w = e^z$$
$$w^2 - 4iw + 1 = 0$$
$$w_{1,2} = \frac{4i \pm \sqrt{-16-4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{4i \pm 2\sqrt{5}i}{2} = 2i \pm \sqrt{5}i = i(2 \pm \sqrt{5})$$
$$e^z = i(2+\sqrt{5}) \qquad i(2+\sqrt{5}) = e^{\ln(2+\sqrt{5})}e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{\ln(2+\sqrt{5})+i\frac{\pi}{2}}$$
$$e^z = e^{\ln(2+\sqrt{5})+i\frac{\pi}{2}}$$
$$z_1 = \ln(2+\sqrt{5}) + i\frac{\pi}{2} + 2\pi ik \qquad k \in \mathbf{Z}$$
$$e^z = i(2-\sqrt{5}) \qquad i(2-\sqrt{5}) = e^{\ln(\sqrt{5}-2)}e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{\ln(\sqrt{5}-2)+i\frac{3\pi}{2}}$$
$$e^z = e^{\ln(\sqrt{5}-2)+i\frac{3\pi}{2}}$$
$$z_2 = \ln(\sqrt{5}-2) + i\frac{3\pi}{2} + 2\pi ik \qquad k \in \mathbf{Z}$$

Harmonikus társkeresés

Reziduum és körintegrál

4. a)

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{\sin z}\, dz$$

b)

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{\sin 2z}\, dz$$

c)

$$\oint_{|z|=2} \frac{2}{z} \cos\frac{1}{z}\, dz$$

Mo. a) Szingularitásai: $\sin z = 0;\ z = k\pi$, tehát a körön belül csak a z=0-ban szakad. Mivel a számláló és a nevez? is 0 a nullában, ezért a L'H-lal kiszámítható a határértéke, ha van. L'H-lal:

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{\cos z} = 1$$

Vagy

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

miatt

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} \frac{z}{\sin z} = 1$$

Tehát **megszüntethet? a szingularitás**. Ez a függvény megtévesztésig hasonlít egy reguláris függvényre, azaz az integrálja a Cauchy-integráltétel miatt 0. Vagy reguláris a 0-n kívül, a körön belül és mivel ott megszüntethet? a szingularitás, ezért nincs a Laurent-sorában f?rész, azaz nincs $\frac{1}{z}$ -s tag. Emiatt $Res_0^f = 0$. Innen:

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{\sin z}\, dz = 0$$

b) Szingularitásai: $\sin 2z = 0;\ z = k\frac{\pi}{2}$, tehát a körön belül csak a z=0-ban szakad. Itt cos(0) = 1 és

$$\sin 2z = 2z - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \frac{(2z)^7}{7!} + \ldots = (2z)(1 - \frac{(2z)^2}{3!} + \frac{(2z)^4}{5!} - \frac{(2z)^6}{7!} + \ldots)$$

azaz **pólusszingularitása** van és **els?fokú pólusa van a nullában**. Ezt onnan tudjuk, hogy $\cos(0) \neq 0$, és a nevez? gyöktényez?jét, $2z$-t az els? hatványon lehet a legmagasabb hatványon kiemelni a sorból.

1. megoldás. Alkalmazhatjuk tehát az els?rend? pólus reziduumának képletét:

$$Res_{z_0}\left(\frac{h(z)}{g(z)}\right) = \left.\frac{h(z)}{g'(z)}\right|_{z_0} \qquad h(z_0) \neq 0,\ g'(z_0) \neq 0,\ g(z_0) = 0$$

$$Res_0(\frac{\cos z}{\sin 2z}) = \frac{\cos 0}{\sin(2z)'|_{z=0}} = \frac{1}{2}$$

Innen a reziduumtétellel:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{\sin 2z}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_0(\left(\frac{\cos z}{\sin 2z}\right) = \pi i$$

2. megoldás. C.i.f.-fel. Felhasználva, hogy

$$\lim_{z\to 0} \frac{2z}{\sin 2z} = 1$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{\sin 2z}\,dz = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\cos z \frac{2z}{\sin 2z}}{z}\,dz =$$

a számlálóban reguláris, a nevez?ben els?fokú, azaz a nulladik deriváltra vontkozó Cauchy-integrálformulából:

$$= \oint_{|z|=1} \frac{\cos z \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{\sin 2z}}{z}\,dz = 2\pi i \lim_{z\to 0} \cos z \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{\sin 2z} = 2\pi i \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \pi i$$

3. megoldás. Az általános reziduumszámítós képlettel. k-adfokú pólus esetén

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} ((z-z_0)^k f(z))^{(k-1)}$$

Most k=1, azaz k-1=0, azaz nem kell deriválni, csak határértéket számítani:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{\sin 2z}\,dz = 2\pi i \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\cos z}{\sin 2z} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \cos z \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{\sin 2z} = \pi i$$

c) Csak a 0-ban szakad (de ott nagyon). Laurent-sorba fejtve $\cos\frac{1}{z}$ -t:

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \dots$$

azaz a Laurent-sor f?részében végtelen sok tag van, ez azt jelenti, hogy függvénynek a nullában **lényeges szingularitása van.** Ilyen függvény integrálját reziduumtétellel szoktuk kiszámítani. Innen:

$$\frac{2}{z}\cos\frac{1}{z} = \frac{2}{z}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \dots\right) = \frac{2}{z} - \frac{2}{2}\frac{1}{z^3} + \frac{2}{4!}\frac{2}{z^5} - \frac{2}{6!}\frac{1}{z^7} + \dots$$

Leolvasva a reziduumot, az 1/z együtthatója:

$$\mathrm{Rez}_0\left(\frac{1}{z}\cos\frac{1}{z}\right) = 2$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{2}{z}\cos\frac{1}{z}\,dz = 4\pi i$$