Bolzano?Weierstrass-tételnek több, de egymáshoz szorsan kapcsolódó tételt neveznek az analízisben. Egyfel?l az **R**^{N}-beli sorozatok elméletében rámutathatunk, hogy minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata, ezt néha **Bolzano?Weierstrass-féle kiválasztási tétel**nek nevezik. Másrészt zárt és korlátos **R**^{N}-beli halmazban haladó sorozatnak van a halmazbeli határértékkel rendelkez? részsorozata. Harmadrészt **R**^{N}-beli végtelen, korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Tartalomjegyzék

Bolzano?Weierstrass-féle kiválasztási tétel

R^N-ben korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Az egyváltozós eset

R-ben ehhez a tételhez még a következ? kommentárt f?zhetjük. Egy valós számsorozatnak, ha nem korlátos, biztosan van **s?r?sögési pont**ja, azaz olyan pont, melynek minden kipontozott környezetében végtelen sok elem van. Ez amiatt van, hogy az egydimeniós esetben értelmezhet? az, hogy a + és ? értékek s?r?södési helyek legyenek, éspedig a + gömbi környezetei az

$$\left(\frac{1}{r}, +\infty\right)$$

alakú intervallumok, ahol *r* pozitív szám (melyet a környezet sugarának nevezünk). Világos, hogy nem-korlátos sorozatra a két végtelen érték valamelyike s?r?södési hely lesz.

Ennél érdekesebb kérdés, hogy van-e s?r?södési pontja egy korlátos sorozatnak. Erre majdnem triviális indoklást a lenti Borel?Lebesgue-tétel szerinti bizonyítás ad. Jobban rávilágít azonban az indokra a csúcselemes vagy a fels? és als? határértékeket felhasználó igazolási mód.

Bizonyítás csúcselemmel

Belátjuk, hogy minden valós sorozatból kiválasztható monoton részsorozat.

Ehhez el?ször vezessük be a *csúcselem* fogalmát. a_k-t csúcselemnek nevezzük, ha minden $n > k$ esetén $a_n \leq a_k$. (Vagyis azokat az elemeket nevezzük így, amelyeknél a nagyobb index? elemek között nincs nagyobb.)

Ekkor két eset lehetséges:

1. Végtelen sok csúcselem van a sorozatban. Ha $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ indexek, melyekre $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots$ csúcselemek, akkor ez utóbbi sorozat nyilvánvalóan monoton csökken?.
2. Véges sok csúcselem van a sorozatban. Vagyis létezik n_0, hogy minden $n \geq n_0$ esetén a_n nem csúcselem.

- De a_{n0} nem csúcselem, vagyis létezik $n_1 > n_0$, hogy $a_{n1} > a_{n0}$.
- De a_{n1} nem csúcselem, vagyis létezik $n_2 > n_1$, hogy $a_{n2} > a_{n1}$ stb.

Ekkor viszont $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots$ nyilván szigorúan monoton növ? sorozat.

Vagyis minden sorozatnak van monoton részsorozata. De a mi sorozatunk egyben korlátos is, márpedig korlátos monoton sorozat konvergens.

Bizonyítás Borel?Lebesgue-tétellel

Azt fogjuk belátni, hogy a sorozatnak van s?r?södési pontja, azaz olyan pont, melynek minden nyílt környezetében van végtelen sok sorozatbeli elem. Ekkor ugyanis már kiválasztható az *u* s?r?södési helyhez konvergáló részsorozat: minden *n*-re:

$$b_n = \min\{i > n \mid |a_i - u| < \delta_n\}$$

ahol ($_n$) egy szigorúan monoton csökken? nullsorozat.

Legyen [*a*,*b*] olyan korlátos és zárt intervallum, mely lefedi a sorozatot. Tegyük fel indirekt módon, hogy a_n-nek nincs s?r?södési helye. Ekkor minden *x* [*a*,*b*]-nek létezik olyan nyílt környezete, melyben csak véges sok sorozatbeli elem van. Az [*a*,*b*] intervallum ezen halmazokból álló nyílt lefedéséb?l kiválasztható véges sok, mely még mindig lefedés, éspedig a Borel?Lebesgue-tétel miatt. Tehát a sorozatnak összesen véges sok szor véges sok, azaz véges sok eleme eshet [*a*,*b*]-be, ami ellentmond annak, hogy a sorozatnak végtelen sok tagja van és ez mind [*a*,*b*]-ben van.

Intervallumfelezéssel

Legyen (a_n) korlátos számsorozat, ekkor (a_n) lefedhet? valamely [,] korlátos és zárt intervallummal. Intervallumfelezéses eljárással rekurzív módon definiálni fogunk egymásba skatulyázott, nullához tartó hosszúságú intervallumok (I_k) sorozatát a következ?képpen.

- I_0:=[$_0$, $_0$]:=[,]
- Ha k természetes szám, és I_k=[$_k$, $_k$] már definiálva van, akkor osszuk két egyenl? hosszúságú részre: I_k = [$_k$,c_k] U [c_k, $_k$]. Valamelyikben a sorozatnak bizonyosan végtelen sok különböz? index? tagja van (ellenkez? esetben ugyanis nem beszélhetnénk végtelen sorozatról). Természetesen el?fordulhat, hogy mindkett?be végtelen sok tag esik. A meghatározottság kedvéért legyen I_{k+1} a két fél közül az az intervallum, melyben végtelen sok különböz? index? tag esik és ezek közül a ?jobboldali? félintervallum. (Ezzel azt értük el, hogy az intervallumsorozat minden tagjában lesz sorozatbeli elem.)

A Cantor-axióma (vagy Cantor-féle közöspont tétel) szerint, mely az egymásba skatulyázott intervallumokról szól az (I_k) intervalumsorozatnak létezik egyetlen közös pontja, legyen ez *c*.

Megállapíthatjuk, hogy minden k természetes számra végtelen sok olyan i index (természetes szám) van, hogy a_i I_k, tehát minden k természetes számra igaz, hogy

$$H_k = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in I_k\} \neq \emptyset \, .$$

Megjegyezzük, hogy a természetes számok jólrendezési tulajdonsága miatt ezeknek a nemüres halmazoknak van minimális elemük. Ezekb?l a halmazokból kell kiválasztanunk egy (i_k) indexsorozatot (tehát egy szigorúan monoton növekv? sorozatot). Ezt szintén rekurzióval tesszük.

- i_0:=min H_0
- Ha már i_k definiálva van minden k-nél nem nagyobb természetes számra, akkor legyen i_{k+1} az a szám, amelyik nagyobb az eddig definiált véges sok elemt?l és a legkisebb ilyen elem H_{k+1}-ben.

Ekkor az

$$(a_{i_k})$$

sorozat c-hez konvergál. QED

Megjegyzések. Vegyük észre, hogy bár kiválasztásról van szó, mégsem kellett használnunk a kiválasztási axiómát, hiszen a természetes számokat a szokásos rendezés jólrendezi, így mindig konstruktívan (egyértelm?en megnevezve) tudtunk kijelölni egy elemet a nemüres részhalmazaiból.

A másik hasznos tulajdonsága a bizonyításnak, hogy kis módosítással többet is állíthatunk segítségével. Ha a fenti konstrukcióban a végtelen sorozatelemet tartalmazó intevallumok közül mindig a fels?t választjuk, akkor az intervallumok közös pontja a sorozat fels? határértéke, azaz a legnagyobb s?r?södési hely

$$\text{limsup}(a_n)$$

lesz. Ha mindig az alsó intervallumot, akkor a legkisebb s?r?södési helyhez jutunk azaz

$$\text{liminf}(a_n)$$

-hez.

Többváltozós eset

Itt a csúcselemes bizonyítás nem m?ködik abban az értelmeben, hogy közvetlenül nem hivatkozhatunk rájuk, mert nincs $\mathbf{R}^N$-ben a m?veletekkel kompatibilis rendezés. Gondolhatnók arra is, hogy komponensenként használjuk az egydimenziós B?W-tételt. Ezzel a következ? a probléma. Világos, hogy létezik minden projekciósorozatra egy-egy részsorozat, mely konvergens. Ám ebb?l egyáltalán nem következtethetünk arra, hogy ezek metszetéb?l kiválasztható részsorozat. Ellenpéldaként vegyünk egy $\mathbf{R}^2$-ben haladó sorozatot. Tegyük fel, hogy (szerencsétlen módon) az egydimenziós B?W-tétel az els? komponensek sorozatából a páros index?eket, a második komponensek közül a páratéan index?eket választja ki. Ekkor a kétdimenziós sorozatnak nincs olyan részsosozata, mely a komponensorozatok *közös* indexeikb?l válaszható ki, tekintve, hogy a közös indexen halmaza üres.

A fentiek miatt olyan módon kell konvergens részsorozatokat kiválasztanunk, mely bizonyosan végtelen sok közös indexel rendelkeznek. A konstrukció a következ?.

Bizonyítás

Legyen

$$(a_n) = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, ..., a_n^{(N)}) \in (\mathbf{R}^N)^{\mathbf{Z}^+}$$

egy N komponens? sorozat, mely korlátos $\mathbf{R}^N$-ben. Ekkor a komponenssorozatok is korlátosak. Az egydimenziós B?W-tétel szerint az

$$(a_n^{(1)})$$

sorozathoz létezik $_1$ indexsorozat úgy, hogy az

$$(a_n^{(1)}) \circ \sigma_1$$

konvergens részsorozat. Hasonlóképpen, de a

$$(a_n^{(2)}) \circ \sigma_1$$

sorozatnak is van

$$(a_n^{(2)}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$$

konvergens részsorozata. Megállapíthatjuk, hogy a

$$(a_n^{(1)}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$$

sorozat szintén konvergens, mert konvergens sorozat részsorozata. Ugyanígy léteznek $_1$, $_2$, ..., $_N$ indexsorozatok, hogy a

$$\begin{array}{l} (a_n^{(1)}) \circ \sigma_1 \\ (a_n^{(2)}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \\ \vdots \\ (a_n^{(N)}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_N \end{array}$$

sorozatok mind konvergensek és így tetsz?leges k=1...N-re

$$(a_n^{(k)}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_N$$

is az, ami pontosan azt jelenti, hogy az

$$(a_n) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_N$$

sorozat komponensenként konvergens, azaz konvergens. A

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_N$$

tehát olyan indexsorozat, mely konvergens részsorozatot választ ki (a_n)-b?l.

B?W-tétel mint a B?W-féle kiválasztási tétel következménye

Az el?bbi tétel múlhatatlan fontosságú következménye az amit sokhelyütt szintén Bolzano?Weierstrass-tételnek neveznek vagyis, hogy egy **R**-beli halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha kompakt. Itt egészen pontosan *sorozatkompaktság*ról van szó, azaz arról, amikor egy tetsz?leges H **R** halmazra teljesül, hogy minden H-beli értékeket felvev? sorozatnak van H-beli határérték? konvergens részsorozata.

B?W-tétel ? Egy H **R** halmaz akkor és csak akkor korlátos és zárt, ha sorozatkompakt.

Bizonyítás. El?ször tegyük fel, hogy H korlátos és zárt. Ekkor a Bolzano?Weierstrass-féle kiválasztási tételb?l következik, hogy minden H-ban haladó sorozatnak ? minthogy ezeket lefedi a korlátos H ? létezik konvergens rélszsorozata. H zártságából pedig az következik, hogy minden H-beli értékeket felvev? konvergens sorozat határértéke szintén H-beli, amivel az állítás els? fele bebizonyosodott.

Másrészt legyen H sorozatkompakt. Ha nem lenne korlátos, akkor tetsz?leges n természetes számra

$$H_n := \{x \in H \mid |x| > n\} \neq \emptyset$$

lenne, és így a kiválasztási axióma segítségével definiálhatunk egy (s_n) sorozatot, melynek elemei rendre H_n-beliek. Ekkor minden n természetes számra s_n > n, és így tetsz?leges (k_n) indexsorozatra (szig. mon. növekv?) |s(k_n)| > k_n > n, ami azt jeleni, hogy (s_n)-nek nincs konvergens részsorozata.

A zártsághoz tekintsük H lezártjának egy h elemét. Ekkor létezik h határértékkel H-beli elemekb?l konvergens sorozat, melyb?l a sorozatkompaktság miatt szükségképpen h H következik. QED

A tétel párja a Borel?Lebesgue-féle lefedési tétel, mely szerint korlátos és zárt **R**-beli halmaz minden nyílt lefedéséb?l kiválasztható véges részlefedés (korlátos és zárt **R**-beli halmaz kompakt).

Ellenpélda végtelen dimenzióra

A tétel végtelen dimenziós esetben nem igaz. Vegyük például a korlátos valós függvények

$$\mathrm{B}([-1,+1],\mathbf{R})$$

terében a szuprémumnormát:

$$||f|| =_{\mathrm{def}} \sup\{|f(x)| \mid x \in [-1,+1]\}$$

és a bel?le definiálható távolságot. Ebben az esetben a páratlan gyökkitev?j? gyökfüggvények

$$f_n = \sqrt[2n+1]{.} \qquad (f_n(x) = \sqrt[2n+1]{x})$$

sorozata nem konvergens. Ez amiatt van, hogy az itteni konvergenciafogalom ugyanaz, mint a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalma. Bár ez a függvénysorozat *pontonként* konvergál a szignumfüggvényhez, de a sorozat a szignumfüggvény minden környezetéb?l kilép. Emiatt még az is igaz, hogy egyetlen részsorozta sem lehet konvergens (azaz egyenletesen konvergens), holott a függvénysorozat maga korlátos (u.is. belefoglalható az azonosan 0 függvény 2 sugarú környezetébe).

Megjegyzés. A tétel azon iránya, mely a sorozatkompaktságot tételezi fel, igaz marad minden metrikus térben.

Példa alkalmazásra

A Bolzano?Weierstrass-tételt felhasználhatjuk például arra is, hogy igazoljuk, hogy **R**-ben (tehát $\mathbf{R}^N$-ben is) minden Cauchy-sorozat konvergens.

Küls? hivatkozások

- A PlanetMath *Bolzano-Weierstrass theorem* szócikke