

A gráfelméletben, gráfok színezésének nevezzük azt, amikor színeket (vagy számokat) rendelünk egy gráf külön részeihez. Ezek alatt a részek alatt csúcsokat, éleket, vagy lapokat értünk.

A leggyakoribb a csúcsok színezésének a problémája, ugyanis a másik két esetet is tudjuk csúcsszínezésként vizsgálni: egy gráf élszínezése megfelel az élgráfjának a csúcsszínezésével, és egy gráf lapszínezése megfelel a gráf dualisanak a csúcsszínezésével.

Egy gráfban azt nevezzük egy "http://wiki.math.bme.hu/jo" http://wiki.math.bme.hu csúcsszínezésnek, amikor két szomszédos csúcs (ket csúcs amely között fut el) különböző színű.

Nagyon sok megoldatlan kérdés van a gráfok színezése terén, viszont számtalan érdekes használata is van a gráf-színezésnek. Például az ismert Sudoku játékot is lehet egy gráfnak tekinteni, ahol a sorokat, oszlopokat, és 3x3-as négyzeteket klikkeknek vesszük.

Tartalomjegyzék

- 1 Kromatikus Szám
 - ♦ 1.1 $\chi(G)$ -nek néhány tulajdonsága:
- 2 Brooks tétel
 - ♦ 2.1 Bizonyítás:
- 3 Vizing tétel
 - ♦ 3.1 Bizonyítás:

Kromatikus Szám

Egy gráfnál gyakori kérdés, hogy minimalisan hány szín kell ahhoz, hogy "http://wiki.math.bme.hu/jol" http://wiki.math.bme.hu kitudjuk színezni a gráf csúcsait. Ezt a számot nevezzük a kromatikus számnak és $\chi(G)$ -vel jelöljük.

$\chi(G)$ -nek néhány tulajdonsága:

$\chi(G) = 1$ akkor és csak akkor ha gráf független pontokból áll (éleket nem tartalmaz)

$\chi(G) = 2$ ha G paros gráf

$\chi(G) \geq 3$ ha G tartalmaz paratlan kört.

$\chi(G) \geq \kappa(G)$ (ahol $\kappa(G)$ G klikkszáma jelöli)

Ha $\chi(G) = \kappa(G)$ akkor a gráf perfekt.

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ (ahol $\Delta(G)$ G maximális fokszáma jelöli)

$\chi(G) \leq \Delta(G)$ ha G nem teljes gráf és nem paratlan hosszú kör (ld. Brooks tétel)

$\chi(K_n) = n$ ahol K_n az n csúcsú teljes gráfot jelöli.

Egy grafnak az elkromatikus szama az a minimalis ertek, ahany szinnel ki tudjuk ugy szinezni a graf eleit, hogy tetszoleges ket el, melynek egy kozos csucs a vegpontja, ne legyen azonos szinu. Az elkromatikus szamot $\chi(G)$ -vel jeloljuk.

Brooks tétel

Ha G egy egyszeru, osszefuggo, nem teljes graf es nem paratlan hosszusagu kor, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$, ahol $\Delta(G)$ G maximalis fokszamat jeloli.

Bizonyitas:

$\Delta(G) = 2$ -re nyilvánvaló az állítás, ugyanis ha a maximalis fokszám 2, akkor vagy egy kör, vagy egy utat kapunk. Egy út vagy egy páros kör esetében 2 szinnel ki tudjuk színezni a grafot, és ha a kör paratlan hosszúságú akkor csak hárommal.

Most már feltehetjük hogy $\Delta(G) \geq 3$. Csúcsszáma való indukcióval bizonyítjuk az állítást.

Először lépésben azt látjuk be, hogy elég kétszeresen összefüggő grafokat vizsgálnunk. Indirekt tegyük fel hogy nem kétszeresen összefüggő a vizsgálandó grafunk, ami azt jelenti hogy létezik x pont melyet elhagyva legalább két komponensre esik szét a grafunk. Ha pontosan két komponensre esik szét, akkor rakjuk vissza mindkét komponensbe x -et, és nevezzük ezeket a komponenseket G_1 és G_2 -nek. Ha több mint két komponensre esik szét, akkor maradjon G_1 továbbra is egy komponens és G_2 meg legyen az összes többi komponens és x uniója: $G_2 = (G \setminus G_1) \cup \{x\}$. A két komponensben minden csúc fokszáma ugyanannyi marad, csak x fokszáma csökken. Tehát továbbra sem lesz egyik fokszám sem nagyobb mint $\Delta(G)$, viszont x feltétlenül kisebb lesz mindkét komponensben $\Delta(G)$ -nél. Ebből következik, hogy egyik komponens sem lehet $\Delta(G) + 1$ pontú teljes graf. Tehát, az indukciós feltevéseink miatt, mindkét komponens kiszínezhető $\Delta(G)$ szinnel, és ha x -et mindkét komponensben ugyanolyan színre választjuk, akkor ha újra ["http://wiki.math.bme.huosszerakjuk"](http://wiki.math.bme.huosszerakjuk) <http://wiki.math.bme.hu> a grafot akkor az eredeti grafunknak egy $\Delta(G)$ szinnel való jó színezést kapjuk.

Második lépésben pedig azt igazoljuk, hogy elég háromszorosan összefüggő grafokat néznünk. Ismét indirekt tegyük fel hogy egy x és y pont elhagyásával szétesik a grafunk G_1 és G_2 -re. Vegezzük el ugyanazt az eljárást mint az első lépésben. Itt csak akkor van gond, ha az egyik komponens minden színezése olyan hogy x és y egyforma színű, és a másik komponens minden színezésénél x és y különböző színű. Ebben az esetben nem tudjuk újra ["http://wiki.math.bme.huosszerakjuk"](http://wiki.math.bme.huosszerakjuk) <http://wiki.math.bme.hu> a grafunkat. Ebben az esetben tekintsük a G_1 és G_2 komponenset és mindkettőben huzzunk be x és y között egy élt. Így x és y fokszáma továbbra is legfeljebb $\Delta(G)$ marad, vagyis az indukciós feltevés miatt vagy mindkét komponens kiszínezhető $\Delta(G)$ szinnel, vagy legalább az egyik komponensünk egy $\Delta(G) + 1$ csúcsú teljes graf. Ha színezhető mindkettő $\Delta(G)$ szinnel, akkor mindkét komponensben különböző színű x és y , tehát ["http://wiki.math.bme.huossze tudjuk illeszteni"](http://wiki.math.bme.huossze tudjuk illeszteni) <http://wiki.math.bme.hu> a két komponenset és készen vagyunk. Ha pedig az egyik komponensünk egy $\Delta(G) + 1$ pontú teljes graf, akkor ebben a komponensben x -nek és y -nak is csak egy szomszédja volt a másik komponensben. Jelöljük ezeket x' és y' -vel. Ha most elvesszük mondjuk az x és y' csúcsot az eredeti grafunkból, akkor ismét két részre esik a grafunk. Ha ezzel a két ponttal vegezzük el az előbbi algoritmust akkor nem kapunk olyan komponenset ami teljes graf, tehát megkapjuk a graf egy $\Delta(G)$ szinnel való jó színezését.

Innentől már csak háromszorosan összefüggő grafokra kell bizonyítanunk az állítást. Legyenek v_1, v_2, v_n olyan csúcsi G -nek, hogy v_1 és v_n között fut el, v_2 és v_n között is fut el, viszont v_1 és v_2 között nem fut el (mivel G nem teljes graf és összefüggő, ezért ilyen csúcsokat minden esetben találunk). Jelöljük a graf többi pontját a következőképpen: $v_3, v_4, \dots, v_{n-1}$ és minden pontnak legyen nagyobb indexű szomszédja is. Ha most elvesszük

a grafból a v_1 és v_2 csúcsoakat akkor G továbbra is összefüggo marad, hiszen háromszorosan összefüggo volt. Ennek a grafnak tekintsuk egy feszitofajat. Egy feszitofanak legalabb ket elsofoku pontja van, tehát lesz elsofoku pontja v_n -en kívül. Legyen ez a csucsunk v_3 . Tehat most elvehetjuk v_1 , v_2 , és v_3 -at a grafból és összefüggo marad, és most ennek a grafnak tekintjuk a feszitofajat, és hasonloan kapjuk v_4 -et.

Az utolso lepesben mar csak meg kell adnunk egy megfelelo szinezest $\Delta(G)$ szinnel: Szinezzuk v_1 -et és v_2 -ot egyforma szinure. A tobbi csucsot indexuk szerint sorban szinezzuk ki moho modon: v_i -hez mindig találunk majd szabad szint, mert ennek a csucsoknak mindig csak a kisebb indexu csucsat szineztuk meg ki és ebbol kevesebb van mint $\Delta(G)$. Csak v_n -nek lehet $\Delta(G)$ szomszedja, ezek kozott viszont ketto (v_1 és v_2) mar egyforma szinu. Ezzel igazoltuk az allitast.

Vizing tétel

Ha G egyszeru graf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$

Bizonyitas:

A bizonyitasban megmutatjuk, hogy minden esetben ki tudjuk szinezni a graf eleit $\Delta(G)$ szinnel. Kezduk el szinezni a grafot, és tegyük fel, hogy egy x és y_1 pontok kozotti elet meg nem szineztunk ki. A graf minden v csucsahoz rendeljunk egy $c(v)$ szint úgy, hogy $c(v)$ azt a szint jelölje ami meg nem szerepel az egyik v -bol kiindulo elen sem. Ilyen azert lesz mindig, mert egy csucsbol legfeljebb $\Delta(G)$ el indulhat ki. Ha $c(x) = c(y_1)$ akkor ezzel a $c(x)$ szinnel kiszinezhetjuk az x és y_1 kozott futo elet.

Tegyük fel, hogy $c(x) \neq c(y_1)$. Ekkor, ha x -bol nem indul ki $c(y_1)$ szinu el, akkor az x és y_1 kozott futo elet kiszinezhetjuk ezzel a szinnel. Egyebkent, tegyük fel hogy x és x -legy y_2 szomszedja kozott futo el szine $c(y_1)$. Most, ha x -bol nem indul ki $c(y_2)$ szinu el, akkor ezzel a szinnel szinezuk az x, y_2 elet, és ekkor mar nem indul ki x -bol $c(y_1)$ szinu el. Egyebkent feltehetjuk, hogy x és egy y_3 csucs kozotti el szine $c(y_2)$, és folytatjuk az elozi modon az algoritmust az y_4, y_5 , stb. pontokkal.

Csak egy esetben nem tudjuk folytatni az algoritmust: ha találunk egy olyan n -t, hogy az x és y_n kozotti el szine $c(y_{n-1})$, de egy j ($1 \leq j < n$) indexre $c(y_j) = c(y_n)$. Ebben az esetben tekintsuk G -nek azt a reszgrafjat, pontosan azok az elek szerepelnek, melyek G -ben $c(x)$ vagy $c(y_n)$ szinuek. Ebben a grafban $\Delta = 2$, x -bol nem indul ki $c(x)$ szinu el, és y_n és y_j -bol pedig nem indul ki $c(y_n)$ szinu el. Ez azt jelenti, hogy ennek a három pontnak a fokszama maximum 1, és x, y_j vagy y_n -tol kulonbozo komponensben van (mivel hogy a graf izolalt pontokbol, utakbol, és korokbol allhat a maximalis fokszam miatt). Csereljuk fel az elek szinet abban a komponensben, melyben x nem található, viszont y_j vagy y_n igen. Ha peldaul y_j volt mas komponensben, akkor elertuk hogy $c(y_j) = c(x)$. Most mar az x és y_j kozotti elet szinezhetjuk $c(x)$ -szel, az x, y_{j-1} el szinet $c(y_{j-1})$ - el, és így tovább amig a vegen x, y_1 -et $c(y_1)$ -el szinezuk. Ezzel egy jo szinezest kaptunk, és bebizonyitottuk az allitast.