

- vector, matrix, random_matrix, identity_matrix,
- ZZ, IntegerRing, QQ, RationalField, RR, RealField, RDF, CC, ComplexField, CDF, GF(p),
- echelon_form, solve_right, solve_left,
- transpose, det (ugyanaz, mint a determinant), rank,
- VectorSpace, dimension, basis, span, is_subspace, row_space, column_space, coordinates,
- right_kernel, intersection, +
- charpoly, eigenvalues, eigenvectors_right, eigenmatrix_right
- jordan_block, block_sum, jordan_form
- sum, limit, function, diff, integral,
- Graph, add_vertex (egy csúcsos), add_vertices (több csúcsos változat), add_edge (egy éles), add_edges (több éles változat), edges, vertices, cliques_maximal, min_spanning_tree, adjacency_matrix

Kérdések:

1. **Véletlen mátrix:** Hozzunk létre egy 3x4-es racionális elem? véletlen mátrixot!

- random_matrix(QQ,3,4)

2. **Egyenletrendszer:** Melyik egyenletrendszer megoldása az $M \cdot b$ vektor, ahol M mátrix, b vektor?

- $M \cdot x = b$

3. **Dimenziótétel:** Ha M egy 5x6-os mátrix, akkor mennyivel egyenl?

$M.\text{right_kernel}().\text{dimension}() + M.\text{column_space}().\text{dimension}()$

- 6

4. **Rang és dimenzió:** Ha M egy 5x6-os mátrix, és az $M.\text{rank}()$ parancsra 3 a válasz, akkor az $M.\text{row_space}().\text{basis}()$ parancsra hány vektor listáját kapjuk?

- 3, hisz a sortér dimenziója 3, így bázisa 3 vektorból áll

5. **Altér bázisára vonatkozó koordináták:** Ha egy V vektortér esetén a $V.\text{basis}()$ parancsra a

```
[
(1, 0, -1),
(0, 1, 2)
]
```

választ kapjuk, akkor mi a kimenete a $V.\text{coordinates}(\text{vector}([1,3,5]))$ parancsnak?

- [1,3], mert a V a háromdimenziós tér egy kétdimenziós altere, ahol az első bázisvektor és a második háromszorosának összege egyenl? az (1,3,5) vektorral, tehát e bázisra vonatkozó koordinátái 1 és 3.

6. **A Sage válasza egy vektorokból vagy mátrixból létrehozott altérre?** Mit jelent a „Free module of degree 4 and rank 2 over Integer Ring” <http://wiki.math.bme.hu> kifejezés, és milyen objektumra mondja ezt a sage?

- A $\mathbb{Z}^4$, vagyis az egészek gy?r?je feletti 4-dimenziós szabad modulus egy 2-rangú, azaz 2-dimenziós alterére. (A szabad modulus abban különbözik a vektortért?l, hogy nem test, hanem gy?r? felett van definiálva. A kérdésbeli objektum az egészek gy?r?jéb?l képzett 4-dimenziós

vektorokból áll.)

7. Mátrix diagonalizálása: Ha M egy $n \times n$ -es mátrix, akkor mi a kimenete a következ? parancsoknak, ha P invertálható, azaz M -nek van n darab lineárisan független sajátvektora?

```
D, P = M.eigenmatrix_right()
P*D*~P
```

- Az M mátrixot kapjuk, ugyanis D a sajátértékek diagonális mátrixa, ami az M -hez tartozó lineáris leképezés mátrixa egy másik bázisban. Az erre való áttérés mátrixa épp a sajátvektorokból áll, tehát ez az áttérés mátrixa, azaz a P mátrix. Így $D = P^{-1} * M * P$, amib?l $M = P * D * P^{-1}$. Rövidebb jelöléssel: $D = \sim P * M * P$, amib?l $P * D * \sim P = M$.

8. Jordan-féle normálalak: Egy mátrix sajátértékei 5 és 4, az els?nek 2, a másodiknak 3 a multiplicitása. Mindkett?höz egydimenziós altér tartozik. Konstruáljuk meg a Jordan-féle normálalakját!

- `jordan_block(5,2).block_sum(jordan_block(4,3))`

9. Jordan-féle normálalak: Ha N egy négyzetes mátrix, akkor mi a kimenete a következ? parancsoknak?

```
J, P = N.jordan_form( transformation=True )
~P*N*P
```

- A J mátrixot, azaz az N Jordan-féle normálalakját kapjuk, mert $N = P * J * \sim P$, amib?l $J = \sim P * N * P$.

10. Sor összege: Melyik sage parancssal és hogyan számolnánk ki az $1-t$?l n -ig terjed? számok negyedik hatványainak összegét?

- `sum(k^4,k,1,n)`

11. Deriválás: Írjuk fel az $f(u(t), v(t))$ függvény t -szerinti deriváltját!

12. Integrál: Számítsuk ki $x^2 * e^x$ határozatlan integrálját, és határozott integrálját az $[1, e]$ intervallumon!

13. Gráfok Rajzoljuk fel a „három ház, három kút” <http://wiki.math.bme.hu> gráfot!