

Előző gyakorlat - Fel - Következő gyakorlat

Tartalomjegyzék

- 1 MatLab
 - ◆ 1.1 Kezdeti lépések
 - ◇ 1.1.1 Hozzáférés a programhoz
 - ◇ 1.1.2 Számológép
 - ◆ 1.2 Adattípusok
 - ◇ 1.2.1 A számbábrázolások
 - ◇ 1.2.2 Mátrixok
 - ◇ 1.2.3 Tartományok
 - ◆ 1.3 Műveletek mátrixokkal
 - ◇ 1.3.1 Transzponált
 - ◇ 1.3.2 Összeadás
 - ◇ 1.3.3 Szorzás
 - ◇ 1.3.4 Tagonként vagy mátrixként
 - ◆ 1.4 Változók
 - ◆ 1.5 Indexelés
 - ◆ 1.6 Összegzés
 - ◆ 1.7 Vektorizáció
 - ◆ 1.8 Függvények
 - ◆ 1.9 Feladatok
 - ◇ 1.9.1 Elemi sorműveletek elvégzése
 - ◇ 1.9.2 Mi ez?
 - ◇ 1.9.3 LER
 - ◇ 1.9.4 Még LER
 - ◇ 1.9.5 Nagy mátrix okosan
 - ◇ 1.9.6 Függvény mátrixokon
 - ◇ 1.9.7 Részmátrix
 - ◇ 1.9.8 Részmátrixon függvény
 - ◇ 1.9.9 Minden második oszlop
 - ◇ 1.9.10 Függvény alkalmazás csak adott elemeken
 - ◇ 1.9.11 Segítség magadon
 - ◇ 1.9.12 Numerikus deriválás

MatLab

Az MatLab program alkalmas különböző matematikai számításokat numerikusan elvégzésére, köztük

- lineáris (mátrix) egyenletek megoldása
- differenciál-egyenletek, megoldása
- szabályozástechnika

Neve a *Matrix Laboratory* rövidítése, a 70-es években kezdte el fejleszteni *Cleve Moler*, a *University of New Mexico* egyetem számítástudományi tanszékének vezetője. Azóta a mathworks cég fizets terméke lett.

Van egy ingyenes alternatívája, az Octave.

Kezdeti lépések

Hozzáférés a programhoz

Ha otthonról dolgozunk, akkor a következő lehetőségek legalább egyikével éljünk:

- A BME-től kaphatunk licenst: <https://net.bme.hu/sw/>. Kövessük az utasításokat a honlapon (BME-s hálózaton belülről érhető el).
- Putty-al lépünk be a leibniz-re és írjuk be a terminálba, hogy `matlab`

A Leibniz-en telepítve van, gépteremből is használhatjuk.

Számológép

Egy terminálban adjuk ki a következő parancsot:

```
matlab -nojvm
```

A MatLab egy fejlettebb számológépként is használható. Írjuk be az alábbiakat:

```
2 + 3
```

majd üssünk Enter-t. Ennek hatására:

```
> 2 + 3  
ans = 5
```

Próbáljuk ki ezeket is:

```
2 - 3  
2 * 3  
2 / 3  
floor (2 / 3)  
mod (2, 3)  
2^3  
sqrt (2)  
log (2)  
log (3)  
log (8) / log (2)  
exp (1)  
pi  
cos (pi / 2)  
(180 / pi) * acos (0.5)
```

Kilépni így lehet

```
exit
```

Adattípusok

Minden szám alapértelmezésben lebegőpontos, akkor is, ha véletlenül egész:

```
1000 / 9
ans = 111.11
```

Viszont megadhatjuk, hogy egészekként értelmezze a számokat:

```
int32 (1000) / int32 (9)
ans = 111
```

MatLab-ban egy szám mindaddig valós, amíg komplexnek nem bizonyul:

```
sqrt (2)
sqrt (-2)
```

A számábrázolások

- `double`: dupla lebegő pontos, 64 bit (8 byte)
 - ◆ valós: 8 byte
 - ◆ komplex: 16 byte
- `single`: szimpla lebegő pontos, 32 bit (4 byte)
 - ◆ valós 4 byte
 - ◆ komplex: 8 byte
- `int32`: 32 bites kettes komplement egész (4 byte)
- `int8`: 8 bites kettes komplement egész: -128..127 (1 byte)
- `uint32`: 32 bites előjel nélküli egész (4 byte)
- `uint8`: 8 bites előjel nélküli egész: 0..255 (1 byte)

A méret nagyon is számít:

```
log(single(1.0001))
log(double(1.0001))
int32(100+100)
int8(100+100)
```

Mátrixok

Az MatLab-ban **minden szám egy mátrix**

- számok: 1x1
- vektorok:
 - ◆ sorvektor: 1xn
 - ◆ oszlopvektor: nx1
- matrix: nxm

Ennek alapos oka van, amit majd később fogunk megérteni és ami a MatLab leglényegéhez vezet bennünket. [Bővebben itt.](#)

Sorvektor:

```
[1 2 3 4]
[1, 2, 3, 4]
```

Oszlopvektor:

```
[1; 2; 3; 4]
```

Ez **nem** oszlopvektor:

```
[[1], [2], [3], [4]]
```

Mátrix:

```
[1 2; 3 4]  
[1, 2; 3, 4]
```

Speciális mátrixok:

- zeros: csupa 0
- ones: csupa 1
- eye: diagonálisban 1, máshol 0
- diag: négyzetes diagonális mátrix, megadott főátlóval

```
zeros (2, 3)  
eye (2, 3)  
ones (3, 1)  
diag ([1, 2, 3, 4])
```

Próbáljuk ki:

```
size (5)  
size ([1, 2, 3])  
size ([1; 2; 3])
```

Tartományok

A tartományok speciális sorvektorok, próbáljuk ki:

```
1:10
```

Ha nem egyesével akarunk ugrani:

```
1:0.1:2  
1:2:10
```

Komplex számmal nem lehet, mert azok nem rendezhetők!
Az eredmény mindig `double` lesz, de utána konvertálhatjuk:

```
int32 (1:0.5:10)
```

Leszálló tartományok:

```
4:-1:1
```

Üres tartomány:

```
4:1:1  
4:1
```

Mátrixok

Diagonális mátrixot megadhatunk így is:

```
> diag(1:4)
ans =
    1    0    0    0
    0    2    0    0
    0    0    3    0
    0    0    0    4
```

Műveletek mátrixokkal

Mivel minden szám egyben egy 1×1 -es mátrix, így ezek mindig használhatóak.

Transzponált

Transzponált egyszerűen **vesszővel** ('):

```
> [1 2; 3 4] '
ans =
    1    3
    2    4
> _
```

Vagy

```
> (1:4) '
ans =
    1
    2
    3
    4
```

Komplex mátrixokra a vessző adjungálást jelent, azaz a transzponált elemenkénti konjugáltját:

```
> [1 2i; 3i 4] '
ans =
    1 - 0i    0 - 3i
    0 - 2i    4 - 0i
```

Konjugálást így csinálhatunk: $(2 + 1i) '$

Összeadás

```
1 + (1:4)
eye (2, 2) + ones (2, 2)
[1; 2; 3; 4] - [4; 3; 2; 1]
```

Szorzás

Minden szorzás mátrixszorzás:

```
> [1 2; 3 4]*[1 2; 3 4]
ans =
    7    10
   15    22
```

Hatványozás szintén, így az invertálás is:

Tartományok

```
[1 2; 3 4]^2
[1 2; 3 4]^(-1)
```

A szorzásnál a méreteknek kompatibiliseknek kell lenniük:

```
ones (2, 3) * ones (3, 5)
```

Sorvektor szorozva oszlopvektorral a skalárszorzás, fordítva diádszorzatnak hívjuk:

```
[1, 2, 3] * [1; 2; 3]
[1; 2; 3] * [1, 2, 3]
```

Tagonként vagy mátrixként

Ha a hatványozást ismételt mátrixszorzásként értelmezi, akkor ez mi?

```
[1 2; 3 4]^0.5
```

És ez mi?

```
sqrt([1 2; 3 4])
```

Bizonyos műveletek *tagonként hatnak* ha egy mátrixra alkalmazzuk, míg mások mátrix-műveletként. De tudunk váltani köztük.

```
> (1:4)^2
error: for A^b, A must be a square matrix
```

Hibát ad, mert két 1x4-es mátrixnak nem értelmes a szorzata. De:

```
> (1:4).^2
ans =
    1    4    9   16
```

Minden műveleti jel olyan, hogy **ha elé pontot rakunk, akkor elemenként hat**. Például az összeadásnál a mátrix összeadás és az elemenkénti összeadás ugyan az, nincsen .+ művelet.

```
> [1 2; 3 4] * [1 2; 3 4]
ans =
    7   10
   15   22
> [1 2; 3 4] .* [1 2; 3 4]
ans =
    1    4
    9   16
```

Hatványozás hasonlóan:

```
> [1 2; 3 4]^(-1)
ans =
   -2.0000    1.0000
    1.5000   -0.5000
> [1 2; 3 4].^(-1)
ans =
    1.0000    0.5000
    0.3333    0.2500
```

A nevesített függvények általában elemenként hatnak:

```
sin (0:0.1:2*pi)
exp ([0,-1;1,0])
```

A m?veleti jelek pedig mátrix m?veletként (*, ^, /, \)

Változók

Ahhoz hogy ne csak egy soros dolgokat tudjunk számolni, az adatokat *változókb*an tároljuk.

```
a = 2
b = 3
a + b
```

Mindig van egy `ans` nevű változónak, amiben az *utoljára kiszámolt érték* található.

Ha nincsen érték adva egy változónak, akkor nem tudunk hivatkozni rá:

```
> a / q
error: `q' undefined
```

A pontosvesszővel (;) **csendes számolást** végezhetünk, ekkor a parancs eredménye nem lesz kiírva:

```
a = 2;
b = 3;
a + b
```

Akkor hasznos, ha az eredményt úgyis elmentjük egy változóba és külön nem akarjuk látni. Később is megnézhetjük.

A `whos` paranccsal megnézhetjük az aktuálisan tárolt változóinkat.

```
> whos
Variables in the current scope:
  Attr Name      Size      Bytes  Class
  ====  =====
      a          1x1         8  double
     ans          1x1         8  double
      b          1x1         8  double
Total is 3 elements using 24 bytes
```

Egy változó értékét bármikor felülírhatjuk:

```
> a = 2;
> a = [1 2; 3 4];
> whos
Variables in the current scope:
  Attr Name      Size      Bytes  Class
  ====  =====
      a          2x2        32  double
```

Indexelés

Legyen `M` egy 3x3-as mátrix. Ennek az *i*-edik sorának *j*-edik eleme a következő?.

```
M = rand(3,3);
i = 1;
```

Tagonként vagy mátrixként

```
j = 3;
M(i, j)
```

Mátrixok összefűzése:

```
[M M]
[M; M]
```

Részsorozat kiválasztása a tartományok használatával:

```
l = 0:0.1:1;
l (:)
l (1:11)
l (1:5)
l (5:end)
l (1:2:11)
```

Sűt:

```
l (1:2:11) = 0
```

Rézmátrix hasonlóan, csak két indexszel.

```
A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
A (1:3, 1:2)
A (1:2, 1:3)
```

Egy sor kihagyása:

```
A ([1, 3], :)
```

Vagy rézmátrix kiválasztása:

```
S = ones (8, 8);
S (3:6, 3:6) = -1
```

Vagy adott indexekre:

```
S = ones (8, 8);
S ([1 2 8], [2 6]) = 8
```

Mátrix kilapítása:

```
A = eye (3, 3);
A (:)
```

Összegzés

- A mátrix sorait összegzi a `sum( , 1)`
- A mátrix oszlopait összegzi a `sum( , 2)`

Azon dimenzió szerint összegez, ami a második paraméter. Ha nincsen második paraméter, akkor 1-nek tekinti. Az összes elemet kilapítással összegezzük:

```
sum(A(:))
```

Vektorizáció

Az MatLab-ban általában egyszerre sok dolgot számolunk, nem csak egy értéken értékelünk ki egy függvényt. Például az X mátrix minden sorának számoljuk ki a normáját (X lehet $n \times 3$ -as, ahol n nagyon sok):

```
X = rand (10, 3);
sqrt (sum (X.^2, 2))
ans =
    0.99105
    0.86977
    1.29362
    0.91697
    1.26149
    0.84024
    1.45410
    1.19791
    1.01153
    1.07420
```

Belülről kifelé haladva elemezzük a függvényeket:

- $X.^2$: kiszámolja az elemenkénti négyzetet
- $\text{sum}(\text{ , } 2)$: összegzi a mátrix sorait egy oszlopvektorba (a 2 azt jelenti, a tömb második dimenziója, azaz a 2. index mentén)
- sqrt : elemenként gyököt von

Számoljuk ki a $2x^2 - 3x + 1$ függvényértékeket, ahol x egy sorvektor:

```
x=0:0.1:1;
fx=2.*x.^2 - 3.*x + 1
```

A **vektorizáció** lényege, hogy ahol lehet mátrix és vektor műveletekre vezessük vissza a számításainkat, mert **1000 darab számpár összeszorzása lassabb, mint két darab 1000 hosszú vektor szorzása!**

Függvények

Írjuk be a következőket egy `f.m` nevű fájlba!

```
function fx = f (x)
    fx = 1 / (x^2 + 1);
end
```

Ha a fájl neve megegyezik a függvénnel és abban a mappában van, ahonnan a programot indítottuk, akkor így használhatjuk:

```
> f(3)
ans = 0.10000
```

Függvények megadása:

```
function <<az eredmény>> = <<a függvény neve>> (<<változók>>)
    ...
end
```

A függvény hasáiban bármit számolhatunk, de a végén adjunk értéket <<az eredmény>> változónak. A függvény hasáiban érdemes csendes számítást végezni, itt használjunk mindenütt pontosvesszőt (;) a sor végén!

Egy másik függvény:

```
function R = remove_last (x)
    R = x (1:end-1);
end
```

Ezt egy `remove_last.m` fájlba tegyük. Példa:

```
> remove_last (1:5)
ans =
     1     2     3     4
```

Feladatok

Elemi sorműveletek elvégzése

Hozzunk létre egy egyjegyű nemnegatív egészekből álló 4×5 -ös mátrixot, majd cseréljük ki két sorát, szorozzuk be a második sorát 2-vel és adjuk az első sorának kétszeresét a harmadik sorhoz! (A mátrix redukált lépcsős alakjának meghatározására azért a `rref` függvényt használjuk!)

Mi ez?

Figyeljük meg a következőket.

```
A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
B=[9 8 7; 6 5 4; 3 2 1];
trace (A*B')
A(:)' * B(:)
```

Mi a `trace (A*B')`?

LER

Számoljuk ki a következő lineáris egyenletrendszer megoldását:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 5y &= 6 \end{aligned}$$

1. megoldás:

```
A = [1 2; 4 5]
b = [3; 6]
x = A^-1 * b
```

2. megoldás:

```
x = A \ b
```

Még LER

Oldjuk meg a következ? egyenletrendszereket:

$$\begin{aligned}x + 5y &= 1 \\ 2x + 4y &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + 5y &= 1 \\ 2x + 4y &= 2 \\ 5x - 6y &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + 2y + 5z &= 1 \\ 5x + 4y + 6z &= 2\end{aligned}$$

Nagy mátrix okosan

- Készítsük el a következ? mátrixot okosan! (Minél kevesebb karaktert használva.)

```
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 3 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 4 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 5 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 6 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 7 2 2 2
2 2 2 2 2 2 2 8 2 2
2 2 2 2 2 2 2 2 9 2
2 2 2 2 2 2 2 2 2 10
```

- És most ezt:

```
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
-1 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0
```

- Sakktáblaszabály

```
1 -1 1 -1 1
-1 1 -1 1 -1
1 -1 1 -1 1
-1 1 -1 1 -1
1 -1 1 -1 1
```

Függvény mátrixokon

Írjunk függvényt, mely az adott mátrix minden elemére alkalmazza a $2\sin^2x + 1$ függvényt.

Részmátrix

Írjunk függvényt, mely egy 5x5-ös mátrix 2. és 4. sorából és 1., 3. és 5. oszlopából álló mátrixot adja.

Résmátrixon függvény

Írjuk meg az előző két függvény kombinációját, mely az adott mátrix 2. és 4. sorából és 1., 3. és 5. oszlopából álló mátrixon alkalmazza a $2\sin^2x + 1$ függvényt.

Minden második oszlop

Írjunk függvényt, mely tetszőleges mátrix minden második oszlopából álló mátrixot adja vissza. (Segítség, a `size` sorvektorban megadja a mátrix dimenzióját.)

Függvény alkalmazás csak adott elemeken

Írjunk függvényt, mely a kapott mátrix csak minden második oszlopán hajtja végre a $2\sin^2x + 1$ függvényt. (Az eredmény mátrix dimenziója ugyanaz, mint a kapott mátrix.)

Segítség magadon

- <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers>
- <http://www.mathworks.com/help/matlab/>
- Google

Numerikus deriválás

Deriváljuk az $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ függvényt numerikusan! Adott egy `x` sorvektor, ami az abszcissa értékeket tartalmazza, `fx` pedig a hozzájuk tartozó függvényértékeket.

```
x = 0:0.1:1
fx = 2.*x.^2 - 3.*x + 1
```

Ekkor a függvény numerikus deriváltja:

```
df = (fx(2:end) - fx(1:end-1)) ./ 0.1
```

Nem egyenletes lépésközzel pedig:

```
df = (fx(2:end) - fx(1:end-1)) ./ (x(2:end) - x(1:end-1))
```

Előző gyakorlat - Fel - Következő gyakorlat