

## Tartalomjegyzék

- 1 A derivált korlátosságának témaköre
  - ◆ 1.1 Egyenletes folytonosság
  - ◆ 1.2 Heine tétele
  - ◆ 1.3 Lipschitz-tulajdonság
  - ◆ 1.4 Korlátos derivált
- 2 Folytonos differenciálhatóság
- 3 Inverzfüggvénytétel R-re

## A derivált korlátosságának témaköre

### Egyenletes folytonosság

A folytonosság lokális tulajdonság. Létezik azonban ennek a fogalomnak globális változata is. A jellegzetes különbségre a két folytonosság között, a következő kérdés mutat rá. Igaz-e, hogy a  $H$  halmazon folytonos  $f$  függvény kiterjeszthető úgy a  $H$  halmaz lezártjára oly módon, hogy a kiterjesztés is folytonos lesz? A válasz nem: az

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

függvénynek nincs folytonos kiterjesztése a  $[0, +\infty)$  zárt halmazra, hisz a 0-ban nem létezik határértéke.

Az egyenletesen folytonos függvények azonban ilyenek lesznek (alább egy példában belátjuk, hogy a fenti függvény valóban nem egyenletesen folytonos).

**Definíció.** Legyen  $f$  a valós számok egy részhalmazán értelmezett, valósba képező függvény és  $H = \text{Dom}(f)$ . Azt mondjuk, hogy az  $f$  **egyenletesen folytonos a  $H$  halmazon**, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in H)(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Tehát az egyenletes folytonosság **közös** delta létezését állítja minden a halmazban lévő pontra, szemben a pontbéli folytonossággal, mely csak külön deltákat garantál mindenhol.

**Példa.** A négyzetgyök-függvény egyenletesen folytonos.

*Elemi úton látjuk be.* Egyfelől világos, hogy ha  $\varepsilon > 0$ , akkor a  $\sqrt{x}$  olyan, hogy minden nemnegatív  $x$ -re, ha  $x < \varepsilon^2$ , akkor

$$\sqrt{x} < \varepsilon$$

Másrészt legyen  $x, y > 0$  és legyen  $\delta > 0$ . Ekkor a  $\delta^2$  szintén alkalmas választás, mert:

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x} - \sqrt{y}| &= \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{|x - y|} \frac{\sqrt{|x - y|}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \sqrt{|x - y|} \frac{\sqrt{x + y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \\
&\leq \sqrt{|x - y|} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Tehát bármely  $\varepsilon$ -hoz  $\delta$  közös található minden ponthoz.

**Nem egyenletes folytonosság jellemzése.** Ha azt szeretnénk definíció szerint belátni, hogy egy függvény nem egyenletesen folytonos egy halmazon, akkor a folytonossághoz hasonló módon a sorozatokkal történő jellemzés eszközehez szoktunk folyamodni. Először is a definíció tagadását kell felírnunk, ebből fogjuk a sorozatokkal jellemezni a nem-egyenletes folytonosságot.

$f$  nem egyenletesen folytonos a  $H$  halmazon, ha

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in H)(|x - y| < \delta, \text{ de } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)$$

Itt helyett írhatjuk az  $(1/n)$  sorozatot, hiszen, ha minden  $n$ -re igaz a kijelentés a  $1/n$ -re, akkor minden  $\varepsilon$ -ra is igaz:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbf{Z}^+)(\exists x_n, y_n \in H)(|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ de } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon)$$

A következı példák erre vonatkoznak:

**Példa.** A reciprok a pozitív számok halmazán nem egyenletesen folytonos.

*Ugyanis.* Például az  $\varepsilon = 1$  esetén minden  $1/n$ -re meg kell adnunk olyan  $x_n$  és  $y_n$  pozitív számokat, hogy bár  $|x_n - y_n| < 1/n$ , de  $|(1/x_n) - (1/y_n)| \geq 1$  legyen. Márpedig

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ és } y_n = \frac{1}{n+1}$$

ilyen. A különbségük a 0-hoz tart, a reciprok-különbségük viszont 1.

**Példa.** Legyen

$$f(x) = \sin(1/x),$$

és vizsgáljuk meg, hogy ez egyenletesen folytonos-e a  $(0,1)$  nyílt intervallumon.

*Mo.* Bár  $f$  folytonos a  $(0,1)$ -en, de a  $(0,1)$  nem zárt, azaz a Heine-tétel (lásd alább) nem alkalmazható. Hasonlóképpen a függvény deriváltja nem korlátos, ezért a később említendő kritérium sem alkalmazható. Gyanítható, hogy a függvény nem egyenletesen folytonos.

Legyen  $\varepsilon = 1$ . Kiválasztjuk  $f$  nullhelyeit az egyik, a maximumhelyeit a másik sorozatnak, mert ezek függvényértékeinek különbsége biztos, hogy nem tart a nullához:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}$$

$$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Ekkor

$$x_n - y_n = \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi(2n\pi + \frac{\pi}{2})} < \frac{\frac{\pi}{2}}{4n^2\pi^2} = \frac{1}{8n^2\pi} < \frac{1}{n}$$

de a függvényértékek különbsége:

$$|\sin(x_n) - \sin(y_n)| = |\sin(2n\pi) - \sin(2n\pi + \pi/2)| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon$$

azaz nagyobb egyenlő a megadott epszilonnál.

## Heine tétele

**Tétel** -- *Heine tétele* -- Zárt és korlátos intervallumon értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos.

**Példa.** Igazoljuk, hogy a

$$g(x) = x \sin(1/x)$$

függvény egyenletesen folytonos a  $(0,1)$  intervallumon.

*Mo.*  $g$ -nek van folytonos kiterjesztése a  $[0,1]$  zárt korlátos intervallumra, mert egyfelől  $1$ -ben értelmezhető folytonos módon a fenti formulával, másfelől  $0$ -ban korlátos szor nullához tartó alakú, azaz a határértéke nulla. Legyen

$$h(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$h$  folytonos a zárt  $[0,1]$ -en, így Heine tétele miatt egyenletesen folytonos. De tudjuk, hogy egyenletesen folytonos függvény minden leszűkítése is egyenletesen folytonos, azaz  $h$  leszűkítése a  $g$  is egyenletesen folytonos. Ez az előbb említett, a leszűkítésre vonatkozó állítás azért igaz, mert ha van közös delta egy bővebb halmazon, akkor nyilván ugyanez a delta jó lesz a szűkebb halmazon is.

## Lipschitz-tulajdonság

Jellegzetes folytonosságtípus a Lipschitz-folytonosság.

**Definíció.** A  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  függvény Lipschitz-tulajdonságú, ha létezik olyan  $L > 0$  szám, hogy minden  $x, y$   $A$ -ra:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Világos, hogy ekkor  $f$  egyenletesen folytonos  $A$ -n, ugyanis legyen  $\delta > 0$ . Ekkor a  $\delta = \varepsilon/L$  olyan, hogy ha  $|x - y| < \delta$ , akkor

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon$$

Fordítva már nem igaz. A gyökfüggvény egyenletesen folytonos, de nem Lipschitz-tulajdonságú, ugyanis  $x=1/n$ ,  $y=1/(n+1)$ -gyel:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}} = \\ &= \frac{\sqrt{n(n+1)}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})n(n+1)} \geq_{n>N} n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

Intervallumon értelmezett differenciálható függvény pontosan akkor Lipschitz-tulajdonságú, ha a deriváltja korlátos.

Ugyanis, 1) ha korlátos a derivált, akkor a Lagrange-tétellel találunk  $L$ -et. 2) ha Lipschitzes, akkor minden különbségi hányadosnak ugyanaz a korlátja, így korlátos a derivált.

### Korlátos derivált

Ha az  $f$  intervallumon értelmezett differenciálható függvény korlátos deriválttal rendelkezik, akkor a Lagrange-féle középértéktétel miatt  $f$  egyenletesen folytonos, sőt Lipschitz-tulajdonságú az értelmezési tartományán. Ugyanis legyen  $K$  olyan pozitív szám, hogy minden  $x \in \text{Dom}(f)$ -re:

$$|f'(x)| \leq K$$

Ha  $\delta > 0$  és  $\delta := \varepsilon/K$ , akkor minden  $x, y \in \text{Dom}(f)$ -re, ha  $|x-y| < \delta$ , létezik az  $x$  és az  $y$  között, hogy azzal:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| < K \cdot \delta = \varepsilon$$

**Példa.** Az

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

egyenletesen folytonos az  $[1, +\infty)$  halmazon.

Ugyanis, itt korlátos a deriváltja:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Ezért ha  $x \in [1, +\infty)$ , akkor

$$\left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} \leq 1$$

**Példa.** A mindenhol értelmezett

$$f(x) = \cos \sqrt[3]{x}$$

függvény egyenletesen folytonos.

*Ugyanis,* a  $[-1,1]$  zártan a Heine-tétel miatt egyenletesen folytonos, azon kívül pedig

$$|f'(x)| = |\sin(\sqrt[3]{x}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}| \leq 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

## Folytonos differenciálhatóság

**Tétel.** -- Zárt intervallumon differenciálható függvény deriváltfüggvénynek, nem lehet megszüntethető szakadása.

*Ugyanis.* Legyen  $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$  diff.-ható és tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

és véges. Ekkor belátjuk, hogy ez a derivált  $a$ -beli helyettesítési értéke. Kiszámítjuk különbségi hányados határértékét! Vegyük az  $x_n = a + 1/n$  sorozatot (ill ennek  $[a,b]$ -beli részét). Minden  $[a, a+1/n]$  intervallumra felírhatjuk a Lagrange-tételt:

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(\xi_n)$$

Ekkor a különbségi hányados függvényértékek sorozata egyenlő lesz a derivált egy függvényértéksorozatával, melyek így ugyanahhoz tartanak. De ez csak az  $f'(a)$  és a  $\lim_n f'$  számok lehetnek, amik így egyenlők.

Ne keressünk tehát sem ugrást, sem megszüntethető szakadást a deriváltfüggvényen. Ellenben lehet korlátos másodfajú és a végtelen másodfajú szakadása.

**6. Feladat.** Határozzuk meg, hogy az alábbi függvények folytonosan differenciálhatóak-e?

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x^2) \frac{e^x - 1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

*Megoldás.* Mindegyiknél a módszer az, hogy (A) Meghatározzuk a deriváltfüggvény határértékét, (B) meghatározzuk a pontbeli deriváltat (C) Megnézzük, hogy egyenlő-e? Ha (A)-ban nincs határérték, akkor abból már következik, hogy nem folyt. diff a függvény.

1.

$$\left( x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right)' = 2x \sin \left( \frac{1}{x} \right) + x^2 \cos \left( \frac{1}{x} \right) \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \left( \frac{1}{x} \right) - \cos \left( \frac{1}{x} \right)$$

nem folyt diff a 0-ban, mert nincs  $\lim_0 f'$ , mert a második tag határértéke nem létezik (bár korlátos).

2.

$$\left( x^2 \sin \left( \frac{1}{x^2} \right) \right)' = 2x \sin \left( \frac{1}{x^2} \right) + x^2 \cos \left( \frac{1}{x^2} \right) \frac{-2}{x^3} = 2x \sin \left( \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{x} \cos \left( \frac{1}{x^2} \right)$$

nem folyt diff a 0-ban, mert nincs  $\lim_0 f'$ , mert a második tag határértéke nem létezik és nem is korlátos.

3.

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot \frac{e^x - 1}{x} + \sin(x^2) \cdot \frac{e^x(x-1)}{x^2} \rightarrow 0$$

Már csak a pontbeli deriváltat kell kiszámítani. Ez is 0.

A fenti tételen kívül több is igaz.

**Állítás.** Ha  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  folytonos  $a$ -ban, differenciálható a nyíltan és létezik a derivált határértéke  $a$ -ban és ez véges szám, akkor  $f$ -nek *létezik* a deriváltja  $a$ -ban (és a deriváltja a fent említett tétel miatt a  $\lim_a f'$  szám).

*Bizonyítás.* A későbbiekben igazolandó  $e^x$ -s L'Hospital-tétel következménye. Tekintsük a különbségi hányados függvényt, legyen a L'H-beli "<http://wiki.math.bme.hu/f>" "<http://wiki.math.bme.hu> az  $f(x)-f(a)$ , az  $x-a$  a  $g$ . Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

azaz *létezik* a pontbeli derivált és ez a derivált határértéke.

**Kérdés:** hol használtuk fel, hogy az  $f$  függvény folytonos?

**Tétel.** -- Darboux-tétel -- Az  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  differenciálható függvény deriváltfüggvénye Darboux-tulajdonságú (azaz minden ilyen függvény két függvényértéke között minden értéket fölvesz).

Ugyanis, Legyen  $f(a) < m < f(b)$  és igazoljuk, hogy létezik  $(a,b)$ , hogy  $f'(c) = m$ . Vegyük a Lagrange-tételhez hasonlóan a

$$g(x) = f(x) - mx$$

függvényt. Megállapíthatjuk, hogy tetszőleges  $x \in (a,b)$ -re

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$$

ha tehát keresünk  $g$ -hez stacionárius pontot  $(a,b)$ -n, akkor megtaláltuk  $c$ -t. Ilyet a Weierstrass-tétellel kereshetünk.  $g$  folytonos, így van maximuma és minimuma. Kell, hogy legyen belül is, ugyanis, ha csak kívül venné fel a szélsőértékeit, akkor a következő történné.  $g'(a) < 0$ , így  $a$ -ban  $g$  lokálisan csökken, hiszen ekkor van olyan kis intervallum, ahol az  $a$ -beli különbséghányados függvény negatív, azaz

$$g(x) < g(a)$$

ugyanekkor egy kis környezetben  $b$ -körül a függvény szintén lokálisan, hiszen

$$\frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0 \quad (x \in (b - \delta, b])$$

és így

$$g(x) < g(b)$$

Sem  $a$ -ban, sem  $b$ -ben ezek szerint nem lehet  $a$  minimum, így annak belül kell lennie. Ekkor viszont alkalmazható a Fermat-tétel, mellyel:

$$g'(c) = 0, \text{ azaz } f'(c) = m$$

**Feladat.** Igaz-e?

1.  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  differenciálható függvény *deriváltfüggvénye* minden zárt és korlátos intervallumon felveszi minimumát és maximumát.
2. Ha az  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  differenciálható függvény *deriváltfüggvénye* negatív és pozitív értékeket is felvesz, akkor van a deriválnak zérushelye.
3.  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  differenciálható függvény *deriváltfüggvénye* korlátos, akkor létezik olyan  $L$  szám, hogy minden  $x, y$ -ra:  $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$ .
4. A deriválható függvények egyenletesen folytonosak.
5. Korlátos és zárt intervallumon differenciálható függvények egyenletesen folytonos.
6. A korlátos deriválttal rendelkező függvények egyenletesen folytonosak.

## Inverzfüggvénytétel $\mathbf{R}$ -re

**Tétel** -- Globális inverzfüggvény-tétel -- Ha  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  függvény folytonosan differenciálható és  $f'$  sehol se nulla, akkor

1.  $f$  invertálható
2.  $f$  inverze folytonos ( $f$  homeomorfizmus)
3.  $f$  inverze deriválható ( $f$  diffeomorfizmus)
4. minden  $x \in I$ -re

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

*Megjegyzés.* Részletesebb indoklás azt is kimutatja, hogy a derivált folytonossága nem szükséges (bár nem árt :).

*Bizonyítás.* 1) A derivált mindenhol azonos eljelű, ellenkező esetben lenne két hely, ahol különbözik, de a Darboux-tétel miatt akkor lenne zérushelye is a deriválnak, ami ellentmond a feltételeknek. Tehát  $f$  szigorúan monoton, így invertálható.

2) Minden  $a$  pontban a derivált nem nulla és folytonos, így létezik olyan környezete, melyben a derivált mindenhol egy  $L$  pozitív számnál nagyobb. Ezért a Lagrange-tétel miatt a környezet bármely két  $x_1, x_2$  pontjára:

$$0 < L \leq f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Emiatt az  $x=f^{-1}(y)$  áttéréssel:

$$L \leq \left| \frac{x_1 - x_2}{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)} \right|$$

azaz

$$\frac{1}{L} |y_1 - y_2| \geq |f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)|$$

azaz az inverz Lipschitzes a környezetben, azaz a pontban folytonos. 3) 4) ezt egyszerre igazoljuk. Az  $u$ -beli differenciálhatóság miatt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(u) &= f'(u)(x - u) + \varepsilon(x)(x - u) \\ f(x) - f(u) &= (f'(u) + \varepsilon(x))(x - u) \quad (x = f^{-1}(y), \quad u = f^{-1}(v)) \\ y - v &= (f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y)))(f^{-1}(y) - f^{-1}(v)) \\ \frac{1}{f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y))} (y - v) &= f^{-1}(y) - f^{-1}(v) \\ \frac{1}{f'(u)} (y - v) + \left( \frac{1}{f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y))} - \frac{1}{f'(u)} \right) (y - v) &= f^{-1}(y) - f^{-1}(v) \end{aligned}$$

Itt az

$$\eta(y) = \frac{1}{f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y))} - \frac{1}{f'(u)}$$

függvény akkor lesz folytonos és  $v$ -ben eltérő, ha maga  $f^{-1}$  is folytonos  $v$ -ben.

**Példa.** Igazoljuk, hogy létezik a  $\sin$  inverze a  $[-\pi/2, \pi/2]$ -n és az inverz folytonos a  $[-1, 1]$ -en (ez az  $\arcsin$ ) ezen kívül az inverz deriválható a belső pontokban!

Ugyanis.  $[-\pi/2, \pi/2]$ -n a  $\sin$  szigorúan monoton növekvő és inverz képe  $[-1,1]$ . Emiatt ez folytonos is és az inverzfüggvény-tétel miatt a nyíltan differenciálható, ugyanis

$$\frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} > 0, \quad \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

az inverze:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$