

Tartalomjegyzék

- 1 Integrálás parciális törtekre bontással
 - ♦ 1.1 A nevező egyszeres gyökökkel rendelkező elsőfokúak szorzata
 - ♦ 1.2 A nevező többszörös gyökökkel rendelkező elsőfokúak szorzata
 - ♦ 1.3 A nevező egyszeres multiplicitású irreducibilis tényezők szorzata
 - ♦ 1.4 A nevező többszörös multiplicitású irreducibilis tényezők szorzata
- 2 Improprius integrál
 - ♦ 2.1 Elemi példák
 - ♦ 2.2 Összetettebb példák
 - ♦ 2.3 Ekvikonvergenca-kritérium
- 3 Az integrálszámítás alkalmazásai

Integrálás parciális törtekre bontással

A nevező egyszeres gyökökkel rendelkező elsőfokúak szorzata

$$\int \frac{1}{x(x+2)} dx = ?$$

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + Bx}{x(x+2)} = \frac{x(A+B) + 2A}{x(x+2)}$$

Két polinom azonos, akkor és csak akkor, ha a megfelelő együtthatók rendre egyenlők:

$$0x + 1 \equiv (A+B)x + 2A \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases}$$

ahonnan: $A=1/2$, $B=-1/2$.

Az egyenletrendszer megoldásán kívül van egy másik módszer is:

$$1 \equiv (A+B)x + 2A$$

-ben először tegyük x -be az egyik gyököt, az 0-t:

$$1 \equiv (A+B) \cdot 0 + 2A = 2A$$

innen $A=1/2$, majd a másik gyököt:

$$1 \equiv (A+B)(-2) + 2A = -2A - 2B + 2A = -2B$$

azaz $B=-1/2$.

Végül visszahelyettesítve a felbontott alakba:

$$\int \frac{1}{x(x+2)} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + C$$

A nevező többszörös gyökökkel rendelkező elsőfokúak szorzata

$$\int \frac{2x-7}{(x-1)(x+1)^2} dx = ?$$

$$\frac{2x-7}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Ekkor a gyökmódszerrel: $x=-1$ -re: $-2C=2(-1)-7=-9$, azaz $C=9/2$. $x=1$ -re $4A=-5$, $A=-5/4$ és egy szabadon választott egyszerű: $x=0$ -ra: $A-B-C=-7$, ahonnan $B=A-C+7$, azaz $B=-5/4-18/4+28/4=5/4$

Az integrál:

$$\int \frac{-5/4}{x-1} + \frac{5/4}{x+1} + \frac{9/2}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{4} \ln|x-1| + \frac{5}{4} \ln|x+1| - \frac{9}{2} \frac{1}{x+1} + c$$

A nevező egyszeres multiplicitású irreducibilis tényező-k szorzata

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = ?$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)}$$

Itt a keresendő alak: $\frac{1}{x(x^2+1)}$ vegyes
módszerrel: $x=0$: $A=1$ $C=0$, mert nincs a bal oldalon elsőfokú $B=-A$, mert másodfokú sincs.

$$\int \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

Kijöhetett volna az is, hogy $C \neq 0$ pl:

$$\int \frac{1}{2x^2+7} dx = \int \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\frac{2}{7}x^2+1} dx = \int \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{7}}x\right)^2+1} dx = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{7}}x\right) + C$$

A nevező többszörös multiplicitású irreducibilis tényező-k szorzata

Ekkor a parciális integrálásnál tanult rekurzív eljárással lehet a másodfokúak hatványait kiintegrálni.

Improprius integrál

Lásd például: [elmélet és példák](#), [megoldások](#) De, ezek nagyon nehéz feladatok!

Definíció. Ha az $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ az I minden korlátos és zárt részintervallumán integrálható (jelben: $f \in \mathbf{R}^{\text{loc}}(I)$), és az integrálfüggvényeinek létezik és véges a határértéke az I végpontjaiban, akkor azt mondjuk, hogy f **improprius integrálható I -n** és **improprius integrálján** az

$$\int_I f = \lim_{x \rightarrow \sup(I)} F(x) - \lim_{x \rightarrow \inf(I)} F(x)$$

számot értjük, ahol F az f egy tetszőleges integrálfüggvénye.

Elemi példák

1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x - \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = 0 - (-\infty) = +\infty$$

azaz nem konvergens.

2. Ellenben a

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r} dx \quad (r < 1)$$

már létezik, mert $F(x) = \frac{1}{-r+1} \frac{1}{x^{r-1}} = \frac{1}{-r+1} x^{1-r}$ ha $x \rightarrow 0$ esetén 0-hoz tart, így pl.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \dots$$

3. Hasonlóképpen

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

szintén konvergens.

Összetettebb példák

1.

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctg^7 x}{1+x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \arctg^8 x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{8} \arctg^8 x = \frac{\pi}{16} - 0 = 0$$

Ekvikonvergencia-kritérium

Tétel. (Ekvikonvergencia-kritérium) Ha az $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$ függvények lokálisan integrálhatók, u az I akármelyik végpontja (akár végtelen is) és létezik és pozitív a

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték, akkor f és g improprius integráljai egyszerre konvergensek vagy egyszerre divergensek.

A fenti határértéket (tetszőleges $u \in I$ -re) még így is szokás jelölni:

$$f(x) \sim_u g(x) \quad \Leftrightarrow_{\text{def}} \quad \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbf{R}^+$$

és azt mondják, hogy f az u körül úgy viselkedik, mint g .

Példák. 1.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg(x)}{x^2}$$

Mivel az $\arctg$ határértéke a végtelenben $\pi/2$, ezért sejthetjük, hogy a függvény improprius integrálhatóság szempontjából úgy viselkedik, mint az $1/x^2$. ezt a következőkkel igazoljuk:

$$\lim_{+\infty} \frac{\frac{\arctg(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{+\infty} \arctg(x) = \frac{\pi}{2}$$

Tehát az integrál konvergens.

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} \\ & \int_0^1 \frac{1}{\sin x^3} \\ & \int_1^{\infty} \sin^3 \frac{1}{x} \\ & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \\ & \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{tg} x} \end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{th}(x)$$

Az integrálszámítás alkalmazásai

Lásd: [itt](#)