

Tartalomjegyzék

- 1 Koordináta reprezentációk
- 2 Egyenes
 - ◆ 2.1 Nulladik p.l.
 - ◆ 2.2 Egyenletrendszer
- 3 Sík
- 4 Házi feladatok

Koordináta reprezentációk

Lineáris kombinációnak nevezzük a

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n$$

alakú kifejezéseket, ahol a λ -k számok, az \mathbf{a} -k vektorok.

Tétel.

1. Ha \mathbf{b}_1 és \mathbf{b}_2 két nempárhuzamos vektor a síkban, akkor a sík minden vektora egyértelműen elír áll ezek lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2$$

2. Ha \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 és \mathbf{b}_3 három, nem egy síkban lév? vektor, akkor a tér minden vektora egyértelműen elír áll ezek lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{b}_3$$

Síkban két nempárhuzamos vektor halmazát, térben három nem egy síkban lév? vektor halmazát *bázis*nak nevezünk. Ha ezek egység-hosszúságúak és páronként mer?legesen egymásra, akkor *ortonormált* bázis alkotnak. A *jobbsodrású* (v.ö.: jobbcsvarszabály) ortonormált bázis a térben az $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Egy \mathbf{v} térvektornak $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázisra vonatkozó *koordinátareprezentációja* az az oszlop mátrix, melynek elemei rendre az el?z? tételbeli egyértelműen létez? λ -k:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

A vektorm?veletek a koordinátareprezentációban a következ?k lesznek.

$$[\mathbf{a} + \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}, \quad [\lambda \cdot \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \quad [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ -a_1b_3 + b_1a_3 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{bmatrix}$$

Külön fontos a vektoriális szorzat esetén megemlíteni a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

"http://wiki.math.bme.huszimbolikus" http://wiki.math.bme.hu determinánssal történő kiszámolási módot és a skaláris szorzást, mint mátrixszorzást:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \mathbf{ab}$$

Egyenes

Legyen \mathbf{r}_0 az e egyenes egy pontjának helyvektora, \mathbf{v} az irányvektora. Ekkor az egyenes bármely \mathbf{r} pontja eláll (alkalmas t valós paraméterrel)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{v}$$

alakban, hiszen az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor párhuzamos az egyenessel (sőt: az egyenesben van), így a \mathbf{v} irányvektor skalárszorosa. A t jelölés az "http://wiki.math.bme.hu" utal. Ha feltételezzük, hogy egy pont sebessége az egyenesen \mathbf{v} , akkor t azt jelenti, hogy az \mathbf{r}_0 -végpontjából az \mathbf{r} végpontjába mennyi idő alatt jutunk el.

Nulladik pl.

0. Legyen ABC egy háromszög, melynek körül írható körének középpontjából a csúcsokhoz menő vektorok: \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Igazoljuk, hogy a magasságok egy pontban, az $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ pontban metszik egymást.

Egyenletrendszer

A fenti egyenletet az e egyenes **paraméteres vektoregyenletének** nevezzük. Ha felírjuk koordinátareprezentációban, akkor a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{vagyis a} \quad \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk, melyet az e egyenes **paraméteres egyenletrendszerének** nevezünk. Persze itt $[\mathbf{r}_0] = (x_0, y_0, z_0)$, $[\mathbf{r}] = (x, y, z)$ és $[\mathbf{v}] = (v_1, v_2, v_3)$.

1. Feladat. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely merőleges mind az e , mind az f egyenesre és áthalad a $P_0 = (1,2,0)$ ponton.

$$e : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 8 \end{cases} \quad \text{és} \quad f : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 4 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Megoldás. Olvassuk le az irányvektorokat! $\mathbf{v}_e = (3,-2,0)$ és $\mathbf{v}_f = (2,0,-1)$. Ezekre merőleges vektort vektoriális szorzattal készítünk:

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$g : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

Azaz:

Két egyenes kölcsönös helyzetével kapcsolatban a következő lehetőségek vannak:

$e \parallel f$ (ennek kritériuma $\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f = \mathbf{0}$) ekkor

vagy egybeesnek (amikor is van közös pontjuk),
vagy különbözőek (ha nincs)

$e \not\parallel f$ (ennek kritériuma $\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f \neq \mathbf{0}$) ekkor:

vagy metszőek (amikor is van közös pontjuk),
vagy kitérőek (ha nincs)

2. Feladat. Határozzuk meg az

$$e : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{és} \quad f : \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -1 \\ z = 3t + 9 \end{cases}$$

egyenletrendszerekkel megadott egyenesek kölcsönös helyzetét!

Megoldás. Két egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak. Ezek: $(3,-1,-2)$ és $(2,0,3)$, azaz biztosan nem párhuzamosak, mert a komponens, amelyik 0, nem áll elő nemnullák szorzataként. Közös pontot az egyenletrendszer megoldásával találhatunk (ha egyáltalán van).

$$\begin{cases} 3t + 2 = 2u - 3 \\ -t = -1 \\ 1 - 2t = 3u + 9 \end{cases}$$

három egyenlet, két ismeretlen, ezért a feladat túlhatározott, azaz általában nincs megoldása. Most tényleg nincs, mert ha $t=1$, akkor $3u=-10$ és $2u=8$, ami lehetetlen.

Sík

Legyen \mathbf{r}_0 az s sík egy pontjának helyvektora, \mathbf{n} a normálvektora, azaz egy olyan nemnulla vektor, mely merőleges a síkra (azaz a sík minden pontjára merőleges). Ekkor a sík bármely \mathbf{r} pontjára igaz lesz:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

hiszen az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor merőleges a sík normálvektorára, így skaláris szorzatuk 0.

Ha felírjuk koordinátákkal, ahol legyen $\mathbf{n} = (A,B,C)$, akkor az

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

egyenlehez jutunk, melyet az s sík egyenletének nevezünk.

3. Feladat. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely áthalad a $P = (3,0,1)$ ponton és párhuzamos az e és f egyenesek által kifeszített síkkal, ha van ilyen.

$$e : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases} \quad f : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{és}$$

Megoldás. Olvassuk le az irányvektorokat! $\mathbf{v}_e = (-2,1,-2)$ és $\mathbf{v}_f = (2,-1,2)$. A sík számára normálvektort úgy kapunk, ha ezekre merőleges vektort készítünk:

$$\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

ami azonban nem alkalmas normálvektornak. Világos, hogy ez a jelenség amiatt lépett föl, mert a két egyenes párhuzamos egymással. Készítsünk tehát a síkjukban lévő nempárhuzamos vektorokat!

Az e -n egy pont az $A = (1,2,0)$, az f -en: $B = (-2,0,0)$, melyek a $t = 0$ értékadás által lettek kiválasztva. Legyen \mathbf{u} az A -ból B -be menő vektor, mely a $(-3,-2,0)$. Ekkor jó lesz normálvektornak a

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_e \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \mathbf{i} + 6 \cdot \mathbf{j} + 7 \cdot \mathbf{k}$$

A sík így:

$$s : -4(x - 3) + 6y + 7(y - 1) = 0$$

4. Feladat. Írjuk fel az alábbi egyenletekkel megadott síkok metszésvonalának egyenletét!

$$s_1 : x - y - 4z - 5 = 0$$

$$s_2 : 2x + y - 2z - 4 = 0$$

Megoldás. A metszésvonal pontjai kielégítik mindkét egyenletet, így az összegüket is:

$$s : 3x - 6z - 9 = 0 \text{ illetve } x - 2z - 3 = 0$$

Most gyakorlatilag azt csináltuk, hogy felírjuk az $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ normálvektorú, a metszésvonalon áthaladó sík egyenletét. Ha keresünk ezen egy olyan pontot, mely az s_1 -en is rajta van, akkor találtunk egy közös pontot. Kettő ilyen kéne. Válasszuk ki például a $z = t$ síkon egy s -beli pontot, ehhez ugyanis ekkor

$$x = 2t + 3$$

tartozik. Ehhez pedig az s_1 miatt:

$$y = 2t + 3 - 4t - 5 = -2t - 2$$

De t helyett bármi állhat, így megkaptuk a metszésvonal összes pontját:

$$e : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

ahol a paraméter a $z = t$.

5. Feladat. Tükrözzük a $P = (4, -3, 5)$ pontot az $s: x - y + z - 6 = 0$ egyenletű síkra!

Megoldás. A P -ből a s -re bocsátott merőleges D dőféspontját kell meghatározni, majd kiszámítani a $\mathbf{p} + 2 \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{p})$ vektort. Az s -re merőleges e egyenes irányvektora nem más, mint a sík normálvektora:

$$\mathbf{n} = (1, -1, 1)$$

így a P adott ponttal:

$$e : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 - t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

A dőféspont ennek a sík egyenletébe helyettesítésével adódik:

$$4 + t - (-3 - t) + 5 + t - 6 = 0$$

innen:

$$6t = -6 \text{ és } t = -1$$

Ekkor a dőféspont koordinátáit a $t = -1$ helyettesítéssel nyerjük az egyenletrendszerből: $D = (3, -2, 4)$

$$P' = \mathbf{p} + 2 \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{p}) = (4, -3, 5) + 2 \cdot (-1, 1, -1) = (2, -1, 3)$$

6. Feladat. Határozzuk meg annak az e egyenesnek az egyenletét, mely illeszkedik a $P = (-1, 2, 3)$ pontra, merőleges az $\mathbf{a} = (6, -2, -3)$ vektorra és metszi az

$$f : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases}$$

egyeneset.

Megoldás. Tudjuk, hogy vektor akkor és csak akkor merőleges egy síkra, ha a sík minden egyenesére merőleges. Ha tehát felírjuk az \mathbf{a} normálvektorú, P -n áthaladó s síkot, akkor abban benne lesz e . Hogy merre lesz, azt f árulja el, mert ahol dőfi a síkot f , ott lesz e és f metszéspontja. Ez azért van, mert e rajta van s -en, így metszéspontja f -fel szintén s -ben van. Ám, pont ebben a pontban dőfi f az s -t.

f paraméteres egyenletrendszere:

$$f : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases}$$

s egyenlete:

$$6(x + 1) - 2(y - 2) - 3(z - 3) = 0$$

A dőféspont:

$$\begin{aligned} 6(2t + 1) - 2(2t - 2) - 3(-4t) &= 0 \\ 12t + 6 - 4t + 4 + 12t &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Azaz $D = (-1, -3, 7)$.

e irányvektora a PD vektor: $(0, -5, 4)$

e paraméteres egyenletrendszere:

$$e : \begin{cases} x = -1 \\ y = -5t - 2 \\ z = 4t + 3 \end{cases}$$

Házi feladatok

1. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, mely tartalmazza az $e: x=1-2t, y=2+t, z=-1-t$ egyenletrendszer? egyeneset és a $P = (0, 1, -2)$ pontot!
2. Határozza meg a $3x+2y-z=3$ és $x-y+3z=1$ egyenletű síkok metszésvonalával párhuzamos, a $P = (1, 2, 3)$ ponton áthaladó egyenes egyenletét.

További feladatok. A megoldásoknál ajánlott a [pdf](#) segédlet utolsó oldalát áttanulmányozni.

Matematika_A1a_2008/3._gyakorlat

1. Határozzuk meg a 2. és 3. feladatban említett egynespárok távolságát!
2. Határozzuk meg a 2. feladatban említett egynespárok szögét!
3. Határozzuk meg a 4. feladatban említett síkpárok szögét!
4. Határozzuk meg az 5. feladatban említett P és s távolságát!
5. Határozzuk meg a 4. feladatban említett síkpárok esetén az " $s_1 + s_2$ " távolságát és a z irányba 5-tel eltolt másának távolságát!