<Matematika A1a 2008

# Tartalomjegyzék



# Bevezetés

Miel?tt a komplex számokra rátérnénk nézzünk példát olyan számkörben való számolásra, mely bár még kommutatív, de eltérést mutat a megszokott számkörökben történ? számolástól.

Legyen $\mathbf{Z}_{13}$ az egész számok 13-mal történ? osztása maradékainak halmaza. Eszerint a fenti halmaz lényegében a következ?:

$$\mathbf{Z}_{13}=\{0,1,3,...,11,12\}$$

Például $\mathbf{Z}_{13}$-ban

$$3\cdot 5=2$$

abban az értelemben, hogy 13-mal 3-mat maradékul adót 5-öt maradékul adóval szorozva 2-t maradékul adót kapunk. Azért a félreértések elkerülése érdekében a fenti egyenl?séget így jelöljük:

$$3\cdot 5\equiv 2\pmod{13}$$

Vagy egy másik érdekes példa: milyen $x$ $\mathbf{Z}_{13}$-beli esetén lesz

$$2\cdot x\equiv 1\pmod{13}$$

Világos, hogy ez nem az 1/2, mert az nem egész. Csak 13 lehet?séget kell kipróbálnunk, hogy megtudjuk, van-e és ha igen, mi lesz:

$$x=7\,.$$

**1. Feladat.** Oldjuk meg $\mathbf{Z}_{13}$-ban a következ? egyenletet:

$$x^2+1=0$$

*Megoldás.* Ez egy másodfokú egyenlet (és a számkör egy kommutatív test, ahol használható a megoldóképlet), így:

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} \equiv \frac{\pm\sqrt{9}}{2} \equiv \pm 3 \cdot 7 \equiv \begin{cases} 8 \\ 5 \end{cases}$$

Ellen?rzéssel meggy?z?dhetünk arról, hogy ezek valóban megoldások. (Megjegyezzük, hogy a fenti gondolatmenet ebben a formájában csak egy intuitív gondolatkísérlet, ám utánagondolva módszertanilag szigorú bizonyítássá tehet?.)

# Komplex számok

A komplex számok halmazát is maradékos osztással rendelkez? halmazból konstruláljuk: a valós együtthetós polinomok **R**[X] halmazából. Közismert, hogy a valósegyütthatós, egyhatározatlanú polinomokal, azaz a

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

alakú kifejezésekkel, ahol az *a*-k valós számok, *n* pedig nemnegatív egész, lehet maradékosan osztani.

**Példa.** Mi az (x^3+8):(x+2) osztás maradéka?

## A számkör és a m?veletek

A komplex számok halmazát egy a maradékos osztással rendelkez? halmazból konstrulájuk: a valós együtthatós polinomok **R**[X] halmazából:

$$\mathbf{C} =_{\mathrm{def}} \mathbf{R}[X]/(x^2 + 1)$$

azaz a komplex számok halmaza a valósegyütthatós polinomok $x^2$+1 polinommal történ? osztási maradékai. Világos, hogy minden ilyen maradék el?áll

$$m(x) = a + bx$$

alakban, azaz legfeljebb els?fokú polinom alakjában. Ebben a számkörben az *összeadás* a polinomösszeadás, a szorzás a polinomok szorzása (illetve ezen eredményének $x^2$+1-vel történ? osztási maradéka). Amikor két els?fokú polinom szorzata másodfokú, akkor sem lépünk ki a számkörb?l, hisz a

$$m(x)^2 + 1 = 0$$

polinomegyenlet megoldható, éspedig az m(x)=x polinom (az identitás) megoldás. Ekkor

$$m(x)^2 = -1$$

azaz ebben a számkörben létezik a -1-nek négyzetgyöke.

## Immaginárius egység, valós és képzetes rész

A fenti egy annyira jellegzetes tulajdonsága a komplex számkörnek, hogy a benne lév? x-re másként hivatkozunk.

$$i$$

-vel jelöljük és az imaginárius egységnek nevezzük. Úgy számolunk vele, mint paraméterrel, vagy határozatlannal (x-szel), csak teljesül rá:

$i^2 = -1$

Ekkor

$$z \in \mathbf{C} \quad \Leftrightarrow \quad z = a + bi \qquad (a, b \in \mathbf{R})$$

itt $a$-t a $z$ valós részének nevezzük és Re($z$)-vel jelöljük, $b$-t a $z$ képzetes részének nevezzük és Im($z$)-vel jelöljük. Világos, hogy Im($z$)    **R**, azaz "http://wiki.math.bme.hutiszta"http://wiki.math.bme.hu valós.

A $z$ = Re($z$) + iIm($z$) alakot a komplex szám kanonikus alakjának nevezzük.

**1. Feladat.** Adjuk meg az

$$\frac{i+4}{2-i}$$

számot kanonikus alakban:

*Megoldás.* Megjegyezzük, hogy a fenti osztás értelmes, mint ahogy nemnulla polinommal való maradékos osztás is az. Persze $z$/0 a komplexekben sem értelmezhet?.

A nevez?ben is van i, emiatt nem kanonikus alakú a szám. "http://wiki.math.bme.hui-telenítsük"http://wiki.math.bme.hu a nevez?t! Ezt hasonló módon tesszük, mint a (négyzet)gyöktelenítésnél, hiszen i úgy tekinthet?, mint a -1 (egyik) négyzetgyöke:

$$\frac{i+4}{2-i} = \frac{(i+4)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = *$$

itt felhasználjuk azt a múlhatatlanul fontos azonosságot, hogy:

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$
$$* = \frac{(i+4)(2+i)}{2^2 - i^2} = \frac{(i+4)(2+i)}{4+1} = \frac{1}{5}(2i - 1 + 8 + 4i) = \frac{1}{5}(7 + 6i) = \frac{7}{5} + i\frac{6}{5}$$

## Konjugált

A fenti példa rámutat a konjugált hasznosságára, mely a következ?:

ha $z = a + b$i    **C**, akkor $\overline{z} = a - bi$ .

Például kifejezhet? a konjugltal az reciprok. Ha $z \neq 0$, akkor

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$$

itt $z\overline{z}$ mindig nemnegatív, hiszen

$$z\overline{z} = a^2 + b^2$$

Ennek a kifejezésnek az alakja vezet el a komplex számok geometriai képéhez.

# Geometriai interpretáció

Minthogy

$$z \in \mathbf{C} \quad \leftrightarrow \quad z = a + bi \qquad (a, b \in \mathbf{R})$$

azaz a komplex számot egyértelm?en meghatározza a valós és képzetes része, így a koordinátasík minden pontja kölcsnösen egyértelm? megfeleltetésbe hozható a komplex számok halmazával.

Ekkor a "http://wiki.math.bme.huhozzáadás"http://wiki.math.bme.hu az eltolás. A konjugálás az "http://wiki.math.bme.huRe"http://wiki.math.bme.hu-tengelyre tükrözés. Innen következik, hogy konjugálás invariáns az összeadásra (s?t a szorzásra is). Az komplex szám hossza az eltolás vektor hossza:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

Ez egyben abszolútérték is, azaz |zw|=|z||w|. A szorzás Ha z egy egységnyi abszolútérték? komplex szám, akkor nyilván:

$$z = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

amelyet még

$$e^z$$

-vel is jelölünk. A valóssal való szorzás miatt egy *r* hosszúságú komplex szám:

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

# Feladatok

## Algebrai alakkal

**2. Feladat.** Oldjuk meg a

$$z^3 + 2z^2 + 5z = 0 \qquad (\mathbf{C} \ni z = ?)$$

egyenletet a komplex számok halmazán!

**3. Feladat.** Oldjuk meg a

$$z\overline{z} = z^3 \qquad (\mathbf{C} \ni z = ?)$$

egyenletet a komplex számok halmazán!

**4. Feladat.** Oldjuk meg a

$$3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i \qquad (\mathbf{R}^2 \ni (x, y) =?)$$

egyenletet a valós számpárok halmazán (azaz x és y valós ismeretlenek)!