

Tartalomjegyzék

- 1 Konvergencia
- 2 Nullsorozatok vagy zérussorozatok
 - ◆ 2.1 Konvergencia, határérték és m?veletek
 - ◆ 2.2 Feladatok
 - ◆ 2.3 Az Euler-féle példa

Konvergencia

Definíció ? *Konvergens sorozat* ? Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozat konvergens, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden pozitív szám esetén megadható olyan N természetes szám, hogy minden az N -nél nagyobb vagy egyenlő n természetes számra $|a_n - A| < \varepsilon$. Illetve szimbolikusan:

$$\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$$

Példák. Az $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{2}{3n+4}\right)$, $\left(\frac{3}{n^2}\right)$ sorozatok konvergensek.

Feladat. Konvergens-e az $a_n = \frac{5n+2}{2n+7}$ általános tagú sorozat?

(*Útmutatás: képezzük az $|a_n - 5/2|$ különbséget és becsüljük felül egy $1/n$ szerű sorozattal, ebből az el?z? példa gondolatmenetével következtessünk vissza az a_n -hoz szükséges N -re.*)

Konvergens, ugyanis az $A = 5/2$ olyan szám, hogy a sorozatnak az A minden környezetén kívül csak véges sok tagja van. A konvergenciát (a definíció alapján) a következőképpen látjuk be. Rögzítsünk tetszőlegesen egy pozitív számot. Legyen egyenlőre n tetszőleges természetes szám, és vizsgáljuk meg, hogy az $|a_n - A|$ szám felülbecsülhető-e olyan sorozattal, melynek infimuma 0. A becsüléshez

$$\begin{aligned} \left| \frac{5n+2}{2n+7} - \frac{5}{2} \right| &= \left| \frac{2(5n+2) - 5(2n+7)}{2 \cdot (2n+7)} \right| = \left| \frac{10n+4 - 10n - 35}{2 \cdot (2n+7)} \right| = \\ &= \left| \frac{-31}{2 \cdot (2n+7)} \right| = \frac{31}{2 \cdot (2n+7)} \end{aligned}$$

Ahol az utolsó lépésben kapott eredményről kell igazolnunk, hogy egy N indextől kezdve $\frac{31}{2 \cdot (2n+7)}$ -nél kisebb. Ehhez oldjuk meg a

$$\frac{31}{2 \cdot (2n+7)} < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget! Reciprokot véve mindkét oldalon (és a reláció érvényességének fenntartására figyelve)

$$2 \cdot (2n + 7) > \frac{31}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{\frac{31}{2\varepsilon} - 7}{2}$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden n -re, mely nagyobb az

$$r = \frac{\frac{31}{2\varepsilon} - 7}{2}$$

számnál, teljesül a kívánt ε -ra vonatkozó egyenlőtlenség. Azaz N -et választhatjuk akármilyen, az r valós számnál nagyobb természetes számra, mert akkor az $n > N$ természetes számokra biztosan igaz lesz a kívánt egyenlőtlenség. r -nél nagyobb N természetes szám pedig van, mert minden valós számnál van nagyobb természetes szám. Tehát összefoglalva, tetszőleges pozitív számra, ha

$$n > N = \left\lceil \frac{\frac{31}{2\varepsilon} - 7}{2} \right\rceil,$$

ahol $\lceil \cdot \rceil$ jelöli az egészrészt, akkor

$$\left| \frac{5n + 2}{2n + 7} - \frac{5}{2} \right| < \varepsilon$$

Azok a *mértani sorozatok*, melyek kvociensének abszolút értéke kisebb mint 1, a nullához konvergálnak. Pont emiatt ezeknél a sorozatoknál teljesen érdektelen, hogy mi az első tagjuk? rendszerint azt 1-nek választjuk.

Fekadat ? Ha $|q| < 1$, akkor (q^n) konvergens és $\lim(q^n) = 0$.

Az állítás legegyszerűbb (bár módszertanilag talán kifogásolható) bizonyítása, ha megkíséreljük a definíciót felírva megoldani a szokásos egyenlőtlenséget. Legyen pozitív szám és keresünk olyan N -et, hogy minden $n > N$ -re

$$|q^n| < \varepsilon$$

teljesüljön. Ehhez oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget n -re:

$$|q^n| = |q|^n < \varepsilon$$

Feltehetjük, hogy q nem nulla, hiszen ekkor az azonosan nulla sorozattal van dolgunk. Vegyük a tízes alapú logaritmusát:

$$\lg |q|^n < \lg \varepsilon$$

$$n \cdot \lg |q| < \lg \varepsilon$$

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$$

hiszen negatív számmal osztva az egyenlőtlenség megfordul. Ezért ha N -et az előző egyenlőtlenség jobb oldalánál nagyobbra választjuk, akkor a nála nagyobb n -ekre bizonyosan igaz lesz a kívánt állítás.

Nullsorozatok vagy zérussorozatok

A numerikus sorozatok témakörében rendkívül hasznosan alkalmazhatóak azok a sorozatok, melyek határértéke a 0 szám. Ezeket nullsorozatoknak, vagy zérussorozatoknak nevezzük. Világos, hogy az $(1/n)$ sorozat például nullsorozat.

Feladat

1. (a_n) pontosan akkor nullsorozat, ha $(|a_n|)$ nullsorozat.
2. (a_n) pontosan akkor konvergens, ha $(|a_n|)$ konvergens.

Az alábbi állítás lényegében az úgy nevezett *rend?relv* egy alakja, mellyel kés?bb foglalkozunk részletesebben.

Állítás ? Majorálás nullsorozatokkal ? Ha $(|a_n|)$ nullsorozat és az (a_n) sorozat olyan, hogy valamely M -re minden $n > M$ esetén

$$|a_n| \leq \delta_n,$$

akkor (a_n) is nullsorozat.

Feladat.

1. $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ nullsorozat
2. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$ nullsorozat

Az alábbi tétel az alkalmazások szempontjából különösen fontos.

Tétel ? A ?korlátos szor nullához tartó? alakú sorozatok elve ? Ha $(|a_n|)$ nullsorozat és az (a_n) korlátos sorozat olyan, akkor

$$(a_n \cdot \delta_n)$$

a nullához tart.

Feladat.

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n + \frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

Konvergencia, határérték és m?veletek

Konvergencia jellemzése nullsorozatokkal ? Az (a_n) sorozat pontosan akkor tart az A valós számhoz, ha az $(a_n - A)$ sorozat nullsorozat. Ez alapján a sorozatkonvergenciát vissza lehet vezetni a nullsorozatok vizsgálatára, amely megkönnyíti a sorozatok konvergenciája és a m?veletek közötti kapcsolat feltárását.

Definíció ? Sorozatm?veletek mint pontonként definiált m?veletek ? Legyen (a_n) és (b_n) valós számsorozat. Ekkor

1. $(a_n) + (b_n)$ vagy $(a_n + b_n)$
jelöli az $a_n + b_n$ általános tagú sorozatot;
2. $(a_n) \cdot (b_n)$ vagy $(a_n \cdot b_n)$
jelöli az $a_n \cdot b_n$ általános tagú sorozatot;
3. ha (b_n) tagjai között csak véges sok 0 található, akkor
 $\frac{(a_n)}{(b_n)}$ vagy $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$
jelöli az a_n/b_n általános tagú sorozatot;

Megjegyzések. Világos, hogy sorozatok különbségét nem feltétlenül szükséges külön definiálnunk, hiszen $(a_n) - (b_n)$ sorozat tekinthető úgy, mint a $(a_n) + (-1) \cdot (b_n)$ sorozat (ahol (-1) az azonosan -1 sorozat).

Tétel ? A konvergencia és a határérték is invariáns az alapműveletekre ? Ha (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok, akkor

1. $(a_n + b_n)$ is konvergens és
 $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$
2. $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens és
 $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$
3. ha $\lim(b_n) \neq 0$, akkor (a_n/b_n) is konvergens és
 $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}$

Feladatok

1. Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az alábbi sorozatnak?

$$\left(\frac{2n^2 - 3n + 9}{2 + 4n - n^2}\right)$$

(*Útmutatás: a számlálót és nevezőt osszuk le a nevező legmagasabb fokú tagjával.*)

$$\frac{2n^2 - 3n + 9}{2 + 4n - n^2} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2}}{\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} - 1} \rightarrow \frac{2 - 0 + 0}{0 + 0 - 1} = \frac{2}{-1} = -2$$

Hivatkozva a határérték és műveletek kapcsolatára vonatkozó tételre.

Megjegyezzük, hogy polinomok hányados esetén, ha a számláló és a nevező azonos fokszámú, akkor a hányados a számláló és a nevező főegyütthatójának hányadosához tart.

2. Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az alábbi sorozatnak?

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

(*Útmutatás: tekintsük törtnek és gyöktelenítsük a számlálóját.*)

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Ezzel kapcsolatban rámutatnánk az

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

azonosság múlhatatlan fontosságára, melyet az számlálóban alkalmaztunk az

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{n+1} \\ B &= \sqrt{n}\end{aligned}$$

szereposztásban.

3. Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az alábbi sorozatnak?

$$\left(n^3 \cdot (\sqrt{n^4+1} - n^2)\right)$$

(*Útmutatás: a második tényezőt tekintsük törtnek és gyöktelenítsük a számlálóját.*)

$$\begin{aligned}n^3 \cdot (\sqrt{n^4+1} - n^2) &= n^2 \cdot \frac{\sqrt{n^4+1} - n^2}{1} \cdot \frac{\sqrt{n^4+1} + n^2}{\sqrt{n^4+1} + n^2} = n^2 \cdot \frac{(n^4+1) - n^4}{\sqrt{n^4+1} + n^2} = \\ &= \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1} + n^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} + 1} \rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ezzel kapcsolatban rámutatnánk az

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

azonosság múlhatatlan fontosságára, melyet az számlálóban alkalmaztunk az

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{n^4+1} \\ B &= n^2\end{aligned}$$

szereposztásban.

Az Euler-féle példa

Az

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

általános tagú sorozat konvergencia, mert igazolható módon monoton és korlátos.

Feladat. Konvergencia-e az alábbi sorozat és ha igen, adjuk meg a határértékét!

$$\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^n$$

(*Útmutatás: osszuk le a számlálót is és a nevezőt is n-nel és alkalmazzuk mindkettőre az alkalmas nevezetes határértéket.*)

$$\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^n = \left(\frac{\frac{n+4}{n}}{\frac{n+3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{e^4}{e^3} = e$$