<Matematika A1a 2008

Tartalomjegyzék

Gyakorlás

1. **Egyszer?sítse az alábbi kifejezéseket!**
   1. $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=?$
   2. $(A\cap B)\cup C=?$, ha $A\subseteq C$.
2. **Oldja meg az alábbi halmazegyenleteket, *X*-re!**
   1. $(A-X)\cup B=X$
   2. $A-X=X-A$

Megoldás.

1.1. Legyen D a feladatban szerepl? halmaz és legyen $U = A \cup B \cup C$ a komplementerképzés alaphalmaza! Emeljünk ki A-t!

$$D=A\cap((B\cap C)\cup(B\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap C)\cup(\overline{B}\cap\overline{C}))=$$

A második tényez? els? két tagjából kiemelhetünk B-t a második két tagjából B komplementert:

$$=A\cap((B\cap(C\cup\overline{C}))\cup(\overline{B}\cap(C\cup\overline{C})))=$$

ekkor a halmaz és komplementere kiadja U-t, így:

$$=A\cap((B\cap U)\cup(\overline{B}\cap U))=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap U=A$$

Tehát $D = A$.

Vagy Boole-algebrai formalizmusban:

$$d=abc+a\overline{b}c+ab\overline{c}+a\overline{bc}=a(bc+\overline{b}c+b\overline{c}+\overline{bc})=a((b+\overline{b})c+(b+\overline{b})\overline{c})=$$
$$=a(1c+1\overline{c})=a(c+\overline{c})=a\cdot 1=a$$

1.2.

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=C\cap(B\cup C)=C$$

az elnyelési tulajdonság miatt és mert A C pontosan azt jelenti, hogy $A \cup C = C$.

2.1. Legyen a komplementerképzés univerzuma U. Tegyük fel, hogy van megoldás. Eltünik az *X* komplementer a bal oldalról, ha mindkét oldalt elmetszük *X*-szel:

$$\begin{array}{ccc}(A-X)\cup B & = & X\\ (A\cap\overline{X})\cup B & = & X\\ ((A\cap\overline{X})\cup B)\cap X & = & X\cap X\\ (A\cap\overline{X}\cap X)\cup(B\cap X) & = & X\\ (A\cap\emptyset)\cup(B\cap X) & = & X\\ B\cap X & = & X\end{array}$$

ez utóbbi pontosan azt jelenti, hogy *X* *B*. Emellett a feltétel mellett B-vel a baloldalon "http://wiki.math.bme.hubeuniózva"http://wiki.math.bme.hu:

$$[\ X=\ ]\qquad (A\cap\overline{X})\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{X}\cup B)\supseteq(A\cup B)\cap(\overline{X}\cup X)=(A\cup B)\cap U=A\cup B$$

amib?l következik, hogy *B* *X* és *A* *X*. Ez azt jelenti, hogy ha van megoldás, akkor az egyértelm? éspedig

$$X=B$$

Most vizsgáljuk meg a megoldhatóság feltételét. Azt kaptuk, hogy ha van megoldás, akkor *A* *X* = *B*, vagyis

$$A\subseteq B$$

De ez elégséges feltétele is a megoldhatóságnak, ugyanis ekkor az *X* = *B* helyettesítés kielégíti az egyenletet:

$$(A\cap\overline{B})\cup B=\emptyset\cup B=B$$

2.2.

$$A-X=X-A$$

vagyis

$$A\cap\overline{X}=X\cap\overline{A}$$

Ha van megoldás és bemetszünk mindkét oldalon *A*-val, akkor

$$\begin{array}{l}A\cap A\cap\overline{X}=X\cap\overline{A}\cap A\\ A\cap\overline{X}=\emptyset\end{array}$$

azaz *A* *X*, de az egyenlet *szimmetrikus* az *A* és az *X* felcserélésére, ezért *X* *A* is teljesül, amib?l *X* = *A*, ha van megoldás. Márpedig az egyenletet az *X* = *A* kielégíti.

Monoton, korlátos sorozatok

A konvergencia alábbi, gyakran alkalmazott, *elégséges feltétele* a sorozatok monoton tulajdonságát helyezi el?térbe. Mindezekhez elevenítsük fel a monoton sorozat definícióját.

Monoton sorozat

Definíció ? Azt mondjuk, hogy az (a_n) valós számsorozat

1. **monoton növekv?**, ha minden *n* természetes számra teljesül:
   $a_n \leq a_{n+1}$
   szigorúan monoton növekv?, ha minden *n* természetes számra teljesül:
   $a_n < a_{n+1}$
2. **monoton csökken?** vagy **monoton fogyó**, ha minden *n* természetes számra teljesül:
   $a_{n+1} \leq a_n$
   szigorúan monoton csökken?, ha minden *n* természetes számra teljesül:
   $a_{n+1} < a_n$
3. **monoton**, ha monoton növekv? *vagy* monoton csökken?
4. **szigorúan monoton**, ha szigorúan monoton növekv? *vagy* szigorúan monoton csökken?

Megjegyzés. A monotonitást, például a szigorú monoton növekedést még úgy is megfogalmazhatjuk, hogy tetsz?leges $n > m$ természetes számokra: $a_n > a_m$

1. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

általános tagú sorozatot szigorúan monoton csökken!

(Útmutatás: használjuk fel, hogy a sin függvény a (0, /2) intervallumon szigorúan monoton n?.)

Világos:

$$n < n + 1$$

ezért reciprokot véve

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

és mivel a sin függvény a (- /2;+ /2) intervallumon szigorúan monoton növekszik, ezért a fenti egyenl?tlenséget megtartja:

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) > \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Tétel ? *a konvergencia monoton korlátossággal megfogalmazott elégséges feltétele* ? Monoton, korlátos sorozat konvergens.

Megjegyzés. A konvergencia lokalitásából következik, hogy a tétel állítása olyan korlátos sorozatokra is érvényes, melyek csak egy indext?l kezdve monotonak.

Bizonyítás. Legyen (a_n) monoton, korlátos valós számsorozat. Az általánosság megszorítása nélkül feltehet?, hogy az (a_n) monoton növekv?. Világos, hogy a sorozat szuprémuma véges. Belátjuk, hogy a sorozat konvergál a sup(a_n) számhoz.

Legyen > 0 tetsz?leges. Ekkor a szuprémum egyenl?tlenségekkel történ? jellemzése alapján sup(a_n)? már nem fels? korlátja (a_n)-nek, így létezik N természetes szám, hogy

$$a_N > \sup(a_n) - \varepsilon$$

Mivel (a_n) monoton növekv?, ezért minden $n > N$ természetes számra

$$a_n \geq a_N$$

így minden $n > N$-re

$$\sup(a_n) \geq a_n \geq a_N > \sup(a_n) - \varepsilon$$

ami azt jelenti, hogy az N+1 indext?l kezdve a sorozat minden tagja benne van a sup(a_n) szám sugarú környezetében.

Rend?r elv

Tétel ? *Közrefogási elv* ? Ha (a_n) illetve (b_n) az A számhoz konvergáló sorozatok, és (c_n) olyan sorozat, hogy egy N természetes számtól kezdve minden n-re

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

akkor (c_n) is konvergens és határértéke A.

Részsorozatok, Bolzano?Weierstrass-féle kiválasztási tétel

Definíció ? *Indexsorozat, részsorozatok* ? Azt mondjuk, hogy az (n_k) pozitív *természetes* számokból álló számsorozat **indexsorozat**, ha szigorúan monoton növekv?. Ha (n_k) indexsorozat, (a_n) pedig sorozat, akkor az

$$b_k = a_{n_k}$$

általános tagú sorozat **részsorozat**a az (a_n) sorozatnak. Funkcionális jelöléssel, ha s sorozat és indexsorozat, akkor

$$s \circ \sigma$$

összetett sorozat részsorozata az s sorozatnak.

Példák.

1) Ha $n_k = k^2$ és $a_n = 1/n$, akkor

$$a_{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

természetesen az indext?l nem függ a sorzat maga, így azt is mondhatjuk, hogy a szóban forgó részsorozat az

$$a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

melyet úgy kapunk, hogy az a_n sorozat minden *négyzetszámadik tagját kiválasztjuk* és az indexek szerint növekv? sorrendbe (szigorúan növekv? indexdsorozat) rakjuk:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, \ldots$

Ha tehát $(a_{n^2}) = (a_{k^2}) = (b_k)$, akkor $(a_1, a_4, a_9, a_{16},\ldots)=(b_1, b_2, b_3, b_4,\ldots)$

2) Ha $n_k = k + 5$ vagy általánosabban $n_k = k + k_0$, akkor lényegében azt kapjuk, hogy a sorozat els? 5 illetve k_0 tagját levágjuk és a maradékot tekintjük:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, \ldots$

Ha tehát $(a_{n+5}) = (a_{k+5}) = (b_k)$, akkor $(a_6, a_7, a_8, a_9,\ldots)=(b_1, b_2, b_3, b_4,\ldots)$

Tétel ? *Bolzano?Weierstrass-féle kiválasztási tétel részsorozatokkal* ? Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

2. feladat. Igazak-e a következ? kijelentések?

1. Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.
2. Ha egy sorozat monoton és van konvergens részsorozata, akkor konvergens.
3. Ha egy sorozat divergens, akkor az (1/n)-nel vett szorzata konvergens.
4. Ha egy sorozat felülr?l nem korlátos, akkor nincs konvergens részsorozata.
5. Ha egy sorozat a + végtelenbe tart, akkor van a + végtelenhez tartó részsorozata.
6. Ha egy konvergens sorozat minden tagja pozitív, akkor a határértéke is pozitív.
7. Ha $(a_{n+1} - a_n)$ nullsorozat, akkor (a_n)

Nevezetes határértékek

Állítás ? Ha $a > 0$, akkor $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$

Állítás $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$

3. feladat. Konvergens-e az alábbi sorozat és ha igen, adjuk meg a határértékét!

$$\sqrt[n]{n^2+2n+4}$$

(Útmutatás: közvetlenül rend?relvvel, vagy a polinom n-edik gyökének határértékére vonatkozó állítással.)

$$\sqrt[n]{n^2+2n+4} \le \sqrt[n]{n^2+2n^2+4n^2} = \sqrt[n]{7n^2} = \sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{7}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1$$

$$\sqrt[n]{n^2+2n+4} \ge \sqrt[n]{4} \to 1$$

4. feladat. Konvergens-e az alábbi sorozat és ha igen, adjuk meg a határértékét!

$$\sqrt[n^4]{n^3-3n}$$

(Útmutatás: a legmagasabb fokú tag felével becsüljük felül (vagy alul, ha kell) a kisebb fokú tagokat, majd alkalmazzuk a rend?relvet.)

$$\sqrt[n^4]{n^3-3n} \leq \sqrt[n^4]{n^3} = \left(\sqrt[n^4]{n^4}\right)^{\frac{3}{4}} \to 1$$

Itt $\left(\sqrt[n^4]{n^4}\right)$ az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozat $n_k = k^4$ indexsorozattal képezett részsorozata, így az 1-hez tart.

$$\sqrt[n^4]{n^3-3n} \geq \sqrt[n^4]{n^3-\frac{n^3}{2}} = \sqrt[n^4]{\frac{n^3}{2}} = \sqrt[n^4]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n^4]{n^3} \to 1 \cdot 1 = 1$$

Ahol felhasználtuk, az el?z? egyenl?tlenség végén kiszámolt határértéket.

5. feladat. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha van, mi a határértékük?

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

(Útmutatás: Alakítsuk át nevezetes alakúvá ?ket és használjuk a rend?relvet illetve a majoráns kritériumot.)

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

itt a gyök alatti sorozat az e-hez tart mert a nevezetes sorozat $n_k = k^2$ indexsorozattal adott részsorozata. Tudjuk, hogy a gyök alatti sorozatnak a 4 fels? korlátjam így a rend?relvvel:

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{4} \to 1$$

Tehát a sorozat az 1-hez tart.

A másik sorozat esetén az átalakítás:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$$

itt a gyök alatti sorozat az e-hez tart emiatt egy indext?l kezdve egy 1-nél nagyobb konstanssal alulbecsülhet?. Ugyanis 2-höz (pontosabban az   = (e?2)-höz) létezik N, hogy minden $n > N$-re a sorozat tagjai nagyobbak 2-nél.

$$+\infty \leftarrow 2^n \leq \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$$

Tehát ez a sorozat nem konvergens, de a + -hez tart.

6. feladat. Konvergense-e az alábbi sorozat? Ha van, mi a határértéke?

$$\left(\frac{n^2-7}{n^2+2n}\right)^{n^2}$$

(Útmutatás: Alakítsuk át nevezetes alakúvá.)

$$\left(\frac{n^2-7}{n^2+2n}\right)^{n^2} = \left(\frac{\frac{n^2-7}{n^2}}{\frac{n^2+2n}{n^2}}\right)^{n^2} = \frac{\left(1+\frac{-7}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}} \to 0$$

A határértékek indoklása az el?z? feladat megoldásában lév?höz hasonló.

Végtelen határérték

Ehhez el?ször definiálnunk kell a végtelen környezeteit.

Definíció. Tetsz?leges >0 számra az (1/ , +) nyílt intervallumokat a + sugarú kipontozott környezetének tekintjük és B (+)-vel jelöljük. Ugyanígy tetsz?leges >0 számra az (- , -1/) nyílt intervallum a - elem sugarú kipontozott környezetének tekintend? és B (-)-vel jelöljük.

A valós számok halmazát az - + "http://wiki.math.bme.huideális"http://wiki.math.bme.hu elemekkel kib?vítve

$$\overline{\mathbf{R}}$$

jelöli. Ebben értelmes a sorozathatárérték definíciója a következ? formában:

Definíció. Legyen *A* **R** U {+ ,- } és (a_n) egy **R**-ben haladó sorozat. Azt mondjuk, hogy az *A* határértéke az (a_n)-nek (ekkor *A* = + vagy - esetén a konvergencia helyett a divergencia szót használjuk), ha

> tetsz?leges >0 számra az létezik *N* természetes szám, hogy minden *N*-nél nagyobb *n* természetes számra
>
> $$a_n \in \mathrm{B}_\varepsilon(A)$$

Ekkor *A* az egyetlen ilyen és ezt lim(a_n)-nel jelöljük.

Határozatlan esetek

Konvergens sorozatok esetén láttuk, hogy a határértékképzés felcserélhet? a sorozatokkal végzett m?veletek elvégzésére, azaz ha * egy alapm?velet és

1. $a_n \longrightarrow a$ **R** és $b_n \longrightarrow b$ **R**,
2. (a_n * b_n) értelmezett és

3. $a * b$ is értelmezett,

akkor $a_n * b_n \longrightarrow a * b$.

Az alapm?veletek között csak a nullával való osztás nincs értelmezve. Ez az el?z?ek fényében azt jelenti, hogy például a fenti tétel nem alkalmazható az alábbi példára:

1. $a_n \equiv 1 \longrightarrow 1$ és $b_n = 1/n \longrightarrow 0$,
2. $a_n/b_n \equiv 1/(1/n)$ értelmezett, de
3. 1/0 nem értelmezett

és nem is konvergens a hányadossorozat, bár a határértéke a plusz végtelen.

Nem mondhatjuk azonban, hogy az 1/0 alakú határértéket mutató sorozatok határértéke mindig a + , hiszen az 1/(-1/n) sorozat ugyanilyen módon keletkezett, de a - -be tart. Ezt csak abban az esetben mondhatnánk, ha minden $a_n \longrightarrow 1$, és $b_n \longrightarrow 0$ sorozat esetén $a_n/b_n \longrightarrow +$ lenne, feltéve, hogy a sorozatok hányadosa létezik.

Ezt a gondolatot fogjuk használni a végtelen határérték? sorozatokkal végzett m?veletekre vonatkozó állítás megfogalmazásánál:

> Ha A és B valamelyike a + vagy - szimbólum (a másik, ha nem ilyen, akkor valós szám), akkor az $A * B$ alapm?veletet akkor értelmezzük a C szimbólumként (mely szintén vagy valós szám, vagy a + , - egyike), ha *minden*, az A-hoz tartó (a_n) sorozatra és *minden*, a B-hez tartó (b_n) sorozatra az ($a_n * b_n$) sorozat *szükségszer?en* a C-hez tart. Ekkor mondjuk tehát, hogy az
>
> $A * B = C$
>
> definíció jó.

Például a (+) + (+) m?velet feltétlenül értelmezett és értéke a + , mert könnyen látható, hogy *bármely* két, a + -hez tartó sorozat összege is a + -hez tart. Ellenben például a 0 · (+) m?velet nem értelmezhet?, mert van két sorozatpár, mely ilyen alakú, de a szorzatuk máshoz tart: $(1/n) \cdot n \longrightarrow 1$, de $(1/n) \cdot n^2 \longrightarrow +$.

Definíció ? *Végtelen értékek és alapm?veletek* ? Az alábbi m?veleti szabályokat vezetjük be a + , - szimbólumokra vonatkozóan, az alábbiakban r tetsz?leges valós szám, p tetsz?leges *pozitív* szám:

1. $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad (\pm\infty) + r = \pm\infty$,
2. $(\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty, \qquad (\pm\infty) - r = \pm\infty, \qquad r - (\pm\infty) = \mp\infty$,
3. $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty, \qquad (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty, \qquad (\pm\infty)\cdot(\pm p) = +\infty, \qquad (\pm\infty)\cdot($,
4. $\dfrac{r}{\pm\infty} = 0 \qquad \dfrac{\pm\infty}{\pm p} = +\infty, \qquad \dfrac{\pm\infty}{\mp p} = -\infty$,

és a szorzás és az összeadás kommutatív.

Definíció ? *Határozatlan esetek* ? Az alábbi alapm?veletek nem értelmezhet?k:

1. $(\pm\infty) - (\pm\infty)$,
2. $0 \cdot (\pm\infty), \qquad (\pm\infty) \cdot 0$,
3. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}, \qquad \left(\dfrac{r}{0}\right)$.

Továbbá értelmezhetjük a 0+ és 0- értékeket és a velük való m?veletvégzést úgy, hogy $a_n \longrightarrow$ 0+ kifejezésen azt értjük, hogy az (a_n) sorozat egy index?l kezdve pozitív értékeket vesz fel és határértéke a 0, valamint a $b_n \longrightarrow$ 0+ kifejezésen azt értjük, hogy az (a_n) sorozat egy index?l kezdve negatív értékeket vesz fel és határértéke a 0. Ekkor minden m?velet azt, ami a 0-ra vonatkozik ugyanaz, valamint értelmezhet? az alábbi m?velet:

$$\frac{p}{0\pm} = \pm\infty, \qquad \frac{-p}{0\pm} = \mp\infty,$$

de 0/0+ és 0/0- természetesen itt sincs.

Tétel ? *Végtelen határérték és alapm?veletek, a fenti definíciók jók* ? Ha az (a_n) és (b_n) sorozatoknak létezik határértéke, az (a_n * b_n) sorozat létezik a * alapm?velettel és a lim(a_n) * lim(b_n) alapm?velet elvégezhet?, akkor az (a_n * b_n) sorozatnak is van határértéke és ez:

$$\lim(a_n * b_n) = \lim(a_n) * \lim(b_n)$$

Ezenkívül a határozatlan esetekben, amikor a határértékekkel végzett m?veletek nem értelmezettek, a m?veletsorozatok határértékeire nem adható általános képlet (mert alkalmasan választott esetekben máshoz és máshoz tartanak).

A hatványozással kapcsoltban is vannak határozatlan esetek, ilyen az

$$1^\infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0$$

alakú határértékek. Az els?re példa az Euler-féle határérték, a harmadikra a pozitív szám n-edik gyökökeib?l álló sorozat határértéke.

1. feladat. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha van, mi a határértékük?

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

(Útmutatás: Alakítsuk át nevezetes alakúvá ?ket és használjuk a rend?relvet illetve a majoráns kritériumot.)

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

itt a gyök alatti sorozat az e-hez tart mert a nevezetes sorozat $n_k = k^2$ indexsorozattal adott részsorozata. Tudjuk, hogy a gyök alatti sorozatnak a 4 fels? korlátjam így a rend?relvvel:

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{4} \rightarrow 1$$

Tehát a sorozat az 1-hez tart.

A másik sorozat esetén az átalakítás:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n}$$

itt a gyök alatti sorozat az e-hez tart emiatt egy indext?l kezdve egy 1-nél nagyobb konstanssal alulbecsülhet?. Ugyanis 2-höz (pontosabban az = (e?2)-höz) létezik *N*, hogy minden *n* > *N*-re a sorozat tagjai nagyobbak 2-nél.

$$+\infty \leftarrow 2^n \leq \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n}$$

Tehát ez a sorozat nem konvergens, de a + -hez tart.

2. feladat. Konvergense-e az alábbi sorozat? Ha van, mi a határértéke?

$$\left(\frac{n^2-7}{n^2+2n}\right)^{n^2}$$

(Útmutatás: Alakítsuk át nevezetes alakúvá.)

$$\left(\frac{n^2+2n}{n^2-7}\right)^{n^2} = \left(\frac{\frac{n^2+2n}{n^2}}{\frac{n^2-7}{n^2}}\right)^{n^2} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{-7}{n^2}\right)^{n^2}} \to +\infty$$

A határértékek indoklása az el?z? feladat megoldásában lév?höz hasonló.