<Matematika A1a 2008

Tartalomjegyzék

- 1 Pontbeli folytonosság
- 2 Folytonosság és m?veletek
    - 2.1 Folytonosság és alapm?veletek
    - 2.2 Folytonosság és függvénym?veletek
- 3 Bolzano-tétel
- 4 Weierstrass-tétel

Pontbeli folytonosság

Definíció. Azt mondjuk, hogy az *f*: $\mathbf{R} \supset\!\!\!\to \mathbf{R}$ függvény folytonos az értelmezési tartománya egy *u* pontjában, ha

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f))(|x-u| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(u)| < \varepsilon)$$

Folytonos egy függvény, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

Példa. $x \mapsto \sqrt{x}$ folytonos.

Legyen *u* > 0 és   > 0. Legyen egyel?re   tetsz?lges. Ha *x* > 0 olyan, hogy |*x* - *u*| < , akkor

$$|\sqrt{x}-\sqrt{u}| = \frac{|x-u|}{\sqrt{x}+\sqrt{u}} \leq \frac{|x-u|}{\sqrt{u}} < \frac{\delta}{\sqrt{u}} = \varepsilon$$

tehát az -hoz a = /(\lu)-t kell választanunk.

Ha u=0, akkor

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

tehát az -hoz a = ^{2}-t kell választanunk.

Példa. abs: x $\mapsto$ |x| folytonos. Ezt azzal látjuk be, hogy az abszolútérték következ? megadását tekintjük:

$$\mathrm{abs}(x) = \max\{a,-a\}$$

Tetsz?leges *u* pontra igaz a következ? becslés:

$$||x|-|u|| \leq |x-u|$$

mert a háromszög egyenl?tlenség miatt:

$$|x| = |x-u+u| \leq |x-u| + |u|$$

azaz

$$|x| - |u| \leq |x - u|$$

illetve

$$|u| = |-u| = |x - u - x| \leq |x - u| + |x|$$

azaz

$$|u| - |x| \leq |x - u|$$

Tehát

$$||x| - |u|| = \max\{|u| - |x|, |x| - |u|\} \leq |x - u|$$

Ezért ha := , akkor:

$$|x - u| < \delta \;\Rightarrow\; ||x| - |u|| \leq |x - u| < \delta = \varepsilon$$

Heine-féle jellemzés. Az *f*: **R** $\supset\!\!\!\to$ **R** függvény folytonos az értelmezési tartománya egy *u* pontjában, ha

$$(\forall (x_n) \in \mathrm{Dom}(f)^{\mathbf{Z}^+})(x_n \to u \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(u))$$

Ebb?l kapjuk azt a rendkívül hasznos eszközt, mellyel a nemfolytonosságot jellemezni tudjuk:

Pontbeli nemfolytonosság jellemzése. Az *f*: **R** $\supset\!\!\!\to$ **R** függvény nem folytonos az értelmezési tartománya egy *u* pontjában, ha

létezik olyan $(x_n) \in \mathrm{Dom}(f)^{\mathbf{Z}^+}$ sorozat, hogy bár $x_n \to u$, de $f(x_n) \not\to f(u)$.

Példa.

$$\mathrm{sgn} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \begin{cases} +1, & \text{ha} \quad x > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \\ -1, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

Nem folytonos a 0-ban.

Hiszen, ha x_n a pozitívokon keresztül tart a 0-ba, akkor $f(x_n)$ +1, miközben f(0)=0≠+1.

Példa.

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

nem folytonos a 0-ban.

Hiszen, ha

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

akkor $x_n \longrightarrow 0$ a pozitívok fel?l, de

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = +1 \neq 0 = f(0)$$

Megjegyezzük, hogy akárhogy is definiálnánk f(0)-t, a függvény nem lenne folytonos, mert ha f(0)≠+1, akkor a fenti sorozat ellenpélda, ha f(0)=+1, akkor az (1/ n) sorozat ellenpélda (mert ekkor $f(x_n) \longrightarrow 0$).

Folytonosság és m?veletek

Folytonosság és alapm?veletek

FIA. A folytonosság invariáns az alapm?veletekre.

Emiatt minden polinomfüggvény és racionális törtfüggvény folytonos. Ehhez csak egyetlen függvény, az identitás folytonosságát kell belátni.

Folytonosság és függvénym?veletek

A függvénym?veletek közül a legfontosabb, a **függvénykompozíció**:

$$\begin{array}{l}\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) \mid g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\} \\ f \circ g : x \mapsto f(g(x))\end{array}$$

Legyen f,g: **R** $\longrightarrow$ **R** *u*   Dom(f○ g). Ha g folytonos u-ban és f folytonos g(u)-ban, akkor f○ g folytonos *u*-ban.

A másik az injektív függvények esetén az inverz függvény képzés.

Injektív egy f függvény, ha $f(x_1) = f(x_2)$-b?l $x_1 = x_2$ következik az f értelmezési tartományában lév? *minden* x_1 és x_2-re. Ezt a tulajdonásgok használtuk, amikor azt írtuk:

$$\begin{array}{c}2^{x+8} = 2^{x^2+5} \\ \Downarrow \\ x + 8 = x^2 + 5\end{array}$$

vagy

$$\begin{array}{c}\sqrt{x+8} = \sqrt{x^2+5} \\ \Downarrow \\ x + 8 = x^2 + 5\end{array}$$

Például szigorúan monoton függvény biztosan injektív. Injektív f inverze:

$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Ran}(f)$$
$$f^{-1}(y) = x, \quad f(x) = y$$

Kés?bb belátjuk, hogy intervallumon értelmezett injektív és folytonos függvény inverze folytonos. Intervallumon szigorú monotonitásból azonban még nem folytonos f esetén is következik az intervallumon folytonos inverz.

Állítás. Ha f: $I \longrightarrow$ **R** szigorúan monoton, akkor az inverze folytonos.

Ugyanis, Legyen f szig. mon. növ? és v=f(u)-ban f^{-1} balról nem folytonos (ha nincs baloladala, akkor jobbról). Ekkor létezik Ran(f) (- ,v]-ben olyan (y_n) konvergens sorozat, mely v-hez tart, de $f^{-1}(y_n)=x_n$ nem tart u-hoz. Az inverz is szigorúan monoton növekv?, így megtartja a rendezés, azaz (x_n) is (- ,u]-ban halad. Korlátos is, mert $\min(y_n)$ képe a képek egy alsó korlátja is lesz. Emiatt (x_n)-nek a B--W-tétel miatt van

$$x_{n_k} \rightarrow \liminf(x_n) < u$$

konvergens részsorozata (ha $\liminf(x_n)$ = u-lenne, akkor konvergens lenne!). Eszerint akkor egy $\liminf(x_n) < w < u$ számra igaz, hogy a (w,u] intervallumban a részsoeozatnak csak véges sok tagja van, ahogy az (f(w),f(u)] intervallumban is csak véges sok képe. De ez ellentmond annak, hogy a részsorozat képe az u-hoz tart.

Példa. Folytonosan invertálható-e az alábbi függvény? Indokoljuk a fenti tétel nélkül!

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-1, & \text{ha} \quad x<0 \\ \quad 0, & \text{ha} \quad x=0 \\ x^2+1, & \text{ha} \quad x>0 \end{cases}$$

Megoldás. Persze, hisz a negatívokon invertálható és csak negatív értéket vesz fel. A pozitívokon szintén és szintén csak pozitív értékeket vesz fel. A 0-beli érték az el?z? képhatlmazokon kívül esik (a 0). Az inverz:

$$\mathrm{Dom}\, f^{-1} = (-\infty,-1) \cup \{0\} \cup (1,+\infty)$$
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{-y-1}, & \text{ha} \quad y<-1 \\ \quad 0, & \text{ha} \quad y=0 \\ \sqrt{y-1}, & \text{ha} \quad y>1 \end{cases}$$

Ez a függvény mindenütt folytonos, mert a gyök az, és a 0-ban izolált pontja van, ahol a függvények triviálisan folytonosak.

Bolzano-tétel

Bolzano-tétel Intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értékeket is felvev? folytonos függvénynek van zérushelye.

A Bolzano-tételt olyan alakban is meg lehet fogalmazni, hogy folytonos függvény két függvényértéke között minden értéket felvesz. Ezt néha *Bolzano--Darboux-tételnek* is nevezik amiatt, mert a most megfogalmazott tulajdonság az úgy nevezett Darboux-folytonosság vagy *Darboux-tulajdonság*.

Példa. Igazoljuk, hogy az intervallumon injektív és folytonos függvény szigorúan monoton.

Ugyanis, feltehet?, hogy ilyen a helyzet: létezik $x_1 < x_2 < x_3$ az I-ben, hogy $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. De ekkor az $f(x_3) \quad [f(x_1),f(x_2)]$ miatt létezik $u \quad [x_1,x_2]$, hogy $f(u) = f(x_3)$, ami miatt f rögtön nem injektív.

A feltételek nem hagyhatók el. Pl. sin periodikus és így nem injektív, bár folytonos. Pl. sgn(x)(|x|+1) szig. mon. n?, de nem folytonos.

Példa. Igazoljuk, hogy ha f:[0,1] $\longrightarrow$ [0,1] folytonos, akkor van olyan $u \quad$ [0,1], hogy f(u)=u (azaz van fixpontja).

Ugyanis, transzformáljuk a függvényt: g(x):=f(x)-x. Ekkor g folytonos és

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0$$

de

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - 0 \geq 0 \\ g(1) &= f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Tehát a Bolzano-tétek miatt van zérushelye g-nek, azaz fixpontja f-nek.

Weierstrass-tétel

Weierstrass-tétel Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi abszolút minimumát és maximumát.

Példa. Mindenhol folytonos függvény két lokális minimumhelye között mindig van egy lokális maximumhelye.