<Matematika A1a 2008

Tartalomjegyzék

Néhány topologikus fogalom

Ha *A* **R** valós számhalmaz, akkor az *u* $\overline{\mathbf{R}}$ pontot az *A*

- **torlódási pontjának** nevezzük, ha minden *r* > 0 esetén $B_r(u)\setminus\{u\}$ *A* nem üres (vagy ekvivalens módon: végtelen)
- **izolált pontjának** nevezzük, ha *u* *A*, de nem torlódási pontja *A*-nak.
- **bels? pontjának** nevezzük, ha van olyan környzete, mely benne van *A*-ban.
- **határpontjának** nevezzük, ha torlódási pontja mind a halmaznak, mind a komplementerének.

Emellett *U* **nyílt halmaz**, ha minden pontja bels? pont és **zárt**, ha komplementere nyílt.

Például egy nemelfajuló (nem egypontú, nem üres) intervallum végpontjai határpontjai az intervallumnak.

Függvényhatárérték

Legyen *f* egy az *A* **R** halmazon értelmezett, **R**-be képez? függvény. Legyen $u\in\overline{\mathbf{R}}$ az *A* torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f*-nek a $v\in\overline{\mathbf{R}}$ elem **határértéke** az *u*-ban, ha

> minden > 0 esetén létezik olyan > 0, hogy minden *x* *A* B (*u*)\{u}-re *f*(*x*) B (*v*)

ahol természetesen a + és - környezetei a már említett módon értend?k.

Ebben az esetben a határérték egyértelm? és jelölése:

$$\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{u} f = v$$

Bal és jobboldali határérték:

$$\exists \lim_{u+} f = v \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \quad \exists \lim_{u} f|_{(u,+\infty)} = v$$

$$\exists \lim_{u-} f = v \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \quad \exists \lim_{u} f|_{(-\infty,u)} = v$$

Ugyanúgy, ahogy a folytonosság esetén itt is van átviteli elv:

Tétel. Legyen *f* egy az *A* **R** halmazon értelmezett, **R**-be képez? függvény. Legyen $u\in\overline{\mathbf{R}}$ az *A* torlódási pontja és $u\in\overline{\mathbf{R}}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

1. *f*-nek a *v* **határértéke** az *u*-ban,
2. minden az *A*\{u}-ban haladó, az *u*-hoz konvergáló (x_n) sorozat esetén az ($f(x_n)$) a *v*-hez konvergál.

Ennek a segítségével egy rendkívül hatékony eszközt kapunk arra, hogy a határérték nemlétezését igazoljuk:

Állítás. *f*-nek pontosan akkor nincs határértéke *u*-ban, ha van olyan *A*\{u}-ban haladó, az *u*-hoz konvergáló (x_n) sorozat, mely esetén az az ($f(x_n)$) nem tart egyetlen elemhez sem.

Feladat. Igazoljuk definíció szerint, hogy

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$
2. $\nexists \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ de létezik mindkét egyoldali határértéke.

1. Legyen > 0. Ekkor azt kell belátnuk, hogy létezik > 0, hogy teljesüljön |*x*| < esetén, hogy a függvényérték a + sugarú környezetébe esik, azaz:

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Világos, hogy ezt azt jelenti, hogy

$$|x| < \sqrt{\varepsilon}$$

amit reciprokvonással kaptunk. Ha tehát := négyzetgyök és |*x*| < , akkor "http://wiki.math.bme.hufelfelé"http://wiki.math.bme.hu következtetve kijön a kívánt egyenl?tlenség.

2. Megadunk egy nullsorozatot, mely függvényértékeinek sorozatának semmiképpen nincs határértéke:

$$x_n = \frac{1}{n}(-1)^n$$

Ekkor $x_{2n} \longrightarrow +$ és $x_{2n+1} \longrightarrow -$, holott ezeknek egyenl?knek kellene lenni?k (ha létezik határérték, akkor minden részsorozat határértéke ugyanaz).

Határérték és m?veletek

Tétel ? *Végtelen határérték és alapm?veletek* ? Ha az *f* és *g* valós függvényeknek létezik határértékük az $u\in\overline{\mathbf{R}}$ helyen, az *f* * *g* alapm?velettl elkészített függvény értelmezési tartományának torlódási pontja *u* és a $\lim_u f$ * $\lim_u g$ alapm?velet elvégezhet?, akkor az *f* * *g* függvénynek is van határértéke *u*-ban és ez:

$$\lim_u (f*g) = \lim_u f * \lim_u g$$

Ezenkívül a határozatlan esetekben, amikor a határértékekkel végzett m?veletek nem értelmezettek, az alapm?veletekkel elkészített függvények határértékeire nem adható általános képlet (mert alkalmasan választott esetekben máshoz és máshoz tartanak).

Feladat. Vizsgáljuk meg határérték szempontjából az

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$$

függvényt.

Mo.

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}=\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-2}{x-1}$$, ha $x\neq 1;2$

Határérték és rendezés

Két elvet használunk gyakran. Az egyik a "http://wiki.math.bme.hukorlátos szor nullához tartó az nullához tart"http://wiki.math.bme.hu , a másik a minorálás: ha g(x) az u-ban a + végtelenbe tart és f(x) az u környzetében nagyobb mint g(x), akkor f(x) is a végtelenbe tart.

A rend?r elv megfogalmazása házi feladat.

Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$f(x)=\frac{\sin(x)\cdot \mathrm{sh}(x)}{e^{2x}}$$

függvénynek létezik-e és ha igen mi a határértéke az értelmezési tartományai határpontjaiban!

Mo.

$$f(x)=\frac{\sin(x)\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{e^{2x}}=\frac{\sin(x)\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{e^{2x}}=\frac{1}{2}\sin(x)(e^{-x}-e^{-3x})=$$

$$=\frac{1}{2}\sin(x)e^{-x}(1-e^{-2x})$$

Egyfel?l

$$|f(x)|\leq\frac{1}{2}e^{-x}\to 0$$, ha $x\to+\infty$

Másfel?l ha

$$x_k = \frac{\pi}{2} - k2\pi$$

akkor

$$f(x_k) = -\frac{1}{2}e^{-3x_k}(1-e^{4x_k}) \geq -\frac{1}{2}e^{-3x_k} \to -\infty$$

miközben

$$f(k\pi) \equiv 0 \to 0$$

tehát nincs határértéke a - -ben.

Határérték és függvénykompozíció

Definíció. Ha *f* és *g* függvények, akkor az $f \circ g$ (függvénykompozíció vagy összetett függvény) hozzárendelési utasítása:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$ másként: $$x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

értelmezési tartománya pedig:

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom} \mid g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Összetett függvények esetén a leggyakrabban használt, a határértékre vonatkozó állítás:

Tétel. Ha *u* torlódási pontja a Dom($f \circ g$) halmaznak, *g* injektív az *u* egy környzetén, létezik határértéke és *f*-nek létezik határértéke $v = \lim_u$ g-ben, akkor $f \circ g$-nek is létezik határértéke *u*-ban és

$$\lim_u f \circ g = \lim_v f$$

Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$$

függvény határértékeit az értelmezési tartománya határpontjaiban!

Folytonosság és határérték kapcsolata

A folytonosságot, csak az értelmezési tartomány pontjaiban nézhetünk, hisz a definícióban f(u) is szerepel. Ellenben határértéket akár azon kívüli is nézhetünk (s?t!). Mégis, a két fogalom között szoros kapcsolat van:

1. Tétel. -- Folytonos függvény határértéke a helyettesítési értéke -- Legyen az *u* az *f* értelmezési tartományában. Ekkor a következ?k ekvivalensek egymással:

1. *f* folytonos *u*-ban
2. *u* izolált pontja Dom(*f*)-nek, vagy *u* torlódási pontja Dom(*f*)-nek, létezik *u*-an határértéke és $\lim_u f$ = f(*u*)

2. Tétel. -- Véges helyen véges határérték? függvény folytonossá tehet? -- Legyen *u* a Dom(*f*) véges torlódási pontja és *v* véges (**R**-beli) szám. Ekkor a következ?k ekvivalensek.

1. $\exists \lim\limits_{u} f = v$
2. létezik az *f*-nek olyan $\overline{f}$ *u*-ban folytonos kiterjeszétse (vagy módosítása), hogy $\overline{f}|_{\mathrm{Dom}(f)\setminus\{u\}} = f|_{\mathrm{Dom}(f)\setminus\{u\}}$ és $\overline{f}(u) = v$

Feladat. Mi a határértéke 0-ban az

$$f(x) = \sqrt{x^2+4}$$

Feladat. Van-e folytonos kiterjesztése az

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

függvény?

Szakadási pontok és azok osztályozása

Folytonos egy függvény, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. De a nem-folytonosságot ezért csak az értelmezési tartomány pontjaiban lehet értelmezni -- sokszor a nem-folytonosságot szakadásnak nevezik. Mi ennél tágabb fogalommal fogunk foglalkozni, szakadást a határpontokban is értelmezünk. Ekkor persze már nem lesz igaz az, hogy folytonos egy függvény, ha nincs szakadása, azt viszont értelmes ekkor is mondai, hogy *folytonos egy függvény, ha az értelmezési tartományána pontjaiban nincs szakadása*.

Definíció. Szakadása van az *f* függvénynek a véges *u* pontban, ha *u*   Dom(*f*), de *f* nem folytonos *u*-ban vagy *u* nem eleme Dom(*f*)-nek, de torlódási pontja Dom(*f*)-nek.

Egy szakadás **els?fajú**, ha minden egyoldali határérték, mely értelmes az létezik is és véges. Ezekb?l kett? van: -- **ugrás**, amikor a bal és jobboldali határérték létezik de nem egyenl? és -- **megsz?ntethet? szakadás**, ha nem ez a helyzet.

Másodfajú, ha nem els?fajú.

Feladat. Milyenek az alábbi függvények szakadásai:

1. $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\ln\left|x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$

Nevezetes határértékek

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to +\infty}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2}$$

Példák

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{\ln\cos x}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(e^{\frac{2}{x^2}-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x+4\pi}{\operatorname{arc\,tg} 3x+\pi}$$

Differenciálhatóság

Legyen *f* valós-valós függvény, *u*   Dom(*f*) Dom(*f*)'. Az *f* függvény differenciálható az *u* pontban, ha

1. Definíció -- létezik olyan : Dom(*f*) $\longrightarrow$ **R** függvény és olyan *m*   **R** szám, hogy:

1. minden *x*   Dom(*f*)-re
   f(*x*) = *f*(*u*) + *m*(*x* - *u*) + (*x*)(*x* - *u*) és
2. (*u*) = 0 és az *u*-ban folytonos.

Ebben az esetben az *f* függvény *u*-beli deriváltja *m* és jele f'(*u*)

2. Definíció -- létezik és véges a következ? határérték:

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\qquad(*)$$

Ekkor f'(*u*) maga a fenti határérték.

A két definíció ekvivalens, amit a következ? egyenl?séggel lehet igazolni:

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}-A, & \text{ha}\quad x\neq u\\ \lim\limits_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}-A, & \text{ha}\quad x=u\end{cases}$$

ahol *A* az *m*-et jelöli, ha 1)-et tudjuk és 2)-t igazoljuk és $\lim_{x \longrightarrow u}$ (f(x)-f(u)/(x-u))-t, ha fordított a helyzet.

Világos, hogy a (*) határérték egy úgy nevezett határozatlan kifejezés, hisz mindig 0/0 alakú. Ez a a szel?k meredekségének határértéke,

Az els? definíció is szemléletes. Itt arról van szó, hogy a függvény felírható *u* körül egy lineárisan elt?n? és egy magasabb rendben elt?n? tag összegeként:

$\ell(x)=f(u)+m(x-u)$, a lineáris és $\varepsilon(x)(x-u)$ a nemlineáris

Példa. Igazoljuk, hogy

$$f(x)=e^{\sin x}$$

differenciálható a 0-ban és deriváltja 1.

Megoldás. Definíció szerint igazoljuk, azaz a pontbeli derivált (*) képletével. Legyen x≠0. Ekkor

$$\frac{e^{\sin x}-e^{\sin 0}}{x-0}=\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\frac{x}{\sin x}$$

Ha most $x\longrightarrow 0$, akkor az utolsó egyenl?ség után az els? tényez? és a második tényez? is az 1-hez tart, minthogy ezek nevezetes határértékek.

Példa. Igazoljuk, hogy

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}-\frac{1}{4}\sin x, & \text{ha}\quad x\neq 0\\ 0, & \text{ha}\quad x=0\end{cases}$$

differenciálható a 0-ban és deriváltja 1/4.

Megoldás. Definíció szerint igazoljuk, azaz a pontbeli derivált (*) képletével. Legyen x≠0. Ekkor

$$\frac{\frac{1-\cos x}{x}-\frac{1}{4}\sin x-0}{x-0}=\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{\frac{1}{4}\sin x}{x}$$

Ha most $x\longrightarrow 0$, akkor az utolsó egyenl?ség után az els? tényez? és a második tag, mint nevezetes határérték az 1/2-hez tart, míg a második tag az 1/4-hez. Emiatt a határérték 1/4.

Példák Bolzanora és Weierstrassra

$$f(x)=e^{e^x}$$

felveszi-e a 2 értéket?

$$f(x)=e^{-\frac{x^2-1}{x}}$$

Felveszi-e a maximumát?

Feladatok (mindenféle gyors diff.)

1. Kiterjeszthet?-e folytonosan ill. differenciálható módon az $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$?

2. Hány zérushelye van az $f(x) = \sqrt[4]{x} - \frac{1}{x^3}$ -nek?

3. Hány zérushelye van az $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 1$ függvénynek?

4. Mik a határértékei az ért. tart. határain, milyen szakadása van, hol monoton, hol vannak a lokális széls?értékei, hol konvex, konkáv?

a) $f(x) = e^{1/x}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = |x|e^x$