

Tartalomjegyzék

- 1 Deriváltak, differenciálási szabályok
 - ◆ 1.1 Linearitás
 - ◆ 1.2 Szorzat és hányados
 - ◆ 1.3 Összetett függvény
- 2 L'Hospital-szabályok
- 3 Fermat-féle szélsőértéktétel
- 4 Lagrange-tétel
- 5 Monotonitás differenciális feltételei
- 6 A függvényvizsgálat differenciális eszközei
 - ◆ 6.1 Határértékek az értelmezési tartomány határpontjaiban
 - ◆ 6.2 Az első derivált vizsgálata
 - ◆ 6.3 A második derivált vizsgálata

Deriváltak, differenciálási szabályok

Definíció. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény deriváltfüggvényén értjük a

$$f' : \{x \in \text{Dom } f \mid f \text{ diff.hato } x\text{-ben}\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Linearitás

A hozzáadott konstans szabálya: $(f + c)' = f'$

A konstans szorzó szabálya: $(cf)' = cf'$

Linearitás: $(af + bg)' = af' + bg'$

Példa.

$$10\sqrt[7]{x} + 2\frac{1}{x^6} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Szorzat és hányados

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Példa.

$$(\sin x \ln x)' = -\cos x \ln x + \sin(x) \frac{1}{x}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Összetett függvény

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

$$(f \circ g \circ h)' = (f' \circ g \circ h)(g' \circ h)h'$$

Példa.

$$\sin(x^2)' = -\cos(x^2) \cdot 2x$$

$$(e^{\cos x^5})' = 5e^{\cos x^5} \sin(x^5)x^4$$

$$(\operatorname{sh}(x^5) \cdot \ln(\operatorname{ch} x))' =$$

$$((\sin x)^{\cos x})' = (e^{\cos x \ln \sin x})' =$$

L'Hospital-szabályok

Tétel -- Gyenge L'Hospital-szabály -- Legyenek f és $g: A \rightarrow \mathbf{R}$ valós-valós függvények, $u \in A$, $f(u)=g(u)=0$, mindkettő differenciálható u -ban és $g'(u) \neq 0$. Ekkor létezik a $\lim_u (f/g)$, és

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

Ugyanis, írjuk fel az 1. definíciónak megfelelően a határértéket. Létezik az u -hoz olyan $\delta: A \rightarrow \mathbf{R}$, hogy minden $x \in A \cap \operatorname{Dom}(f/g)$ -ra

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(u) + f'(u)(x-u) + \varepsilon(x)(x-u)}{g(u) + g'(u)(x-u) + \eta(x)(x-u)}$$

és $\lim_u \varepsilon(x) = 0$, $\lim_u \eta(x) = 0$. Emiatt és $f(u)=g(u)=0$ miatt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(u) + \varepsilon(x)}{g'(u) + \eta(x)}$$

Aminek a határértéke, ha x tart u -hoz a kívánt hányados, amennyiben ellenőrizük, hogy $g'(u) + \eta(x)$ nem lesz nulla egy elég szűk környezetben. Ekkor ugyanis a hányadosnak nem lenne értelme. Nos, η egy elég kis környezetben a nulla $|g'(u)|/2$ sugarú környezetében lesz, így ez a veszély nem fenyeget.

1. Feladat. a.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \cos x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}} = e^{\frac{\frac{\sin(0)}{\cos(0)}}{1}} = 1$$

Tétel -- Erős L'Hospital-szabály -- Legyenek f és $g: (a,b) \rightarrow \mathbf{R}$ az (a,b) -ben differenciálható függvények,

$$\begin{aligned} \lim_a f &= \lim_a g = 0, \text{ vagy } \infty, \\ \lim_a f' &= \lim_a g' = 0, \text{ vagy } \infty, \\ &\vdots \end{aligned}$$

de $\lim_a g^{(n)} \neq 0$ és létezzen a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Ekkor létezik a $\lim_a (f/g)$, és

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Bizonyítás a Cauchy-féle középérték tétellel, illetve ennek általánosításával.

1. Feladat. b.

$$\begin{aligned} (\sin x)^x &= e^{x \ln \sin x} = e^{\frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}} = * \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} &=_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \\ * &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

1. Feladat. c.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}$$

1. Feladat. d.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x} =_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = -\infty$$

1. Feladat. e. $x \rightarrow \pi/4$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)^{-\ln(x-\frac{\pi}{4})} &= e^{-\ln(x-\frac{\pi}{4}) \ln \operatorname{tg} x} = * \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\ln(x-\frac{\pi}{4})}} &=_{L'H} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}}{\frac{-1}{\ln(x-\frac{\pi}{4})} \frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}} = +\infty \end{aligned}$$

$$* = 0$$

1. Feladat. f. -- amikor nem működik az ismételt L'Hospitalás --

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - \cos x} = ?$$

1. Feladat. g. -- amikor nem működik az ismételt L'Hospitalás --

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}} + e^{\frac{3}{x}}} = ?$$

Fermat-féle szélsőértéktétel

Tétel -- Differenciálható függvény belső pontbeli szélsőértéke létezésének szükséges feltétele -- Ha f valós-valós függvény és f differenciálható az u int $\text{Dom}(f)$ pontban és f -nek u -ban lokális szélsőértéke van, akkor

$$f'(u) = 0,$$

Tipikus átvitelieltes tétel, hisz a "<http://wiki.math.bme.hu/határérték>" "<http://wiki.math.bme.hu> létezését tudjuk, csak az értékét kell kiszámolnunk. Tegyük fel, hogy u -ban minimum van. Legyen (δ_n) az 0-hoz tartó pozitív sorozat, mely minden n -re $\delta_n + u, u - \delta_n \in \text{Dom}(f)$. Ekkor

$$0 \leq f(u + \delta_n) - f(u) \text{ és } f(u - \delta_n) - f(u) \geq 0$$

Most az első osszuk le δ_n -nel, a másodikat $-\delta_n$ -nel. Ekkor:

$$0 \leq \frac{f(u + \delta_n) - f(u)}{\delta_n} \rightarrow f'(u) \text{ és } f'(u) \leftarrow \frac{f(u - \delta_n) - f(u)}{-\delta_n} \leq 0$$

S mivel, ha egy sorozat csupa nemnegatív (nempozitív), akkor a határértéke is ilyen, ezért:

$$0 \leq f'(u) \leq 0 \text{ azaz } f'(u) = 0$$

2. Feladat. Igaz-e?

1. Ha f differenciálható az u int $\text{Dom}(f)$ -ben és $f'(u)=0$, akkor ott szélsőértéke van.
2. Ha f differenciálható az u int $\text{Dom}(f)$ -ben és ott szélsőértéke van, akkor $f'(u)=0$.
3. Ha $f: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ monoton és létezik $f'(b)$ és $=0$, akkor ott lokális szélsőértéke van (itt $f'(b)$ -n a baloldali deriváltat értjük).
4. Ha f -nek az u int $\text{Dom}(f)$ -ben szélsőértéke van, akkor $f'(u)=0$.

Megoldás.

1. Nem igaz. Ellenpélda: $f(x)=x^3$ és $u=0$. Itt ugyanis u int $\text{Dom}(f)$, $f'(0)=0$, de nincs szélsőértéke f -nek. A derivált zárushelye ugyanis nem elégséges feltétele a szélsőértéknek.
2. Nem igaz. $[0,1]$ zárton az $f(x)=x$ -nek szélsőértéke a 0, de 0-ban a jobboldali derivált 1.
3. Igaz. Még akkor is, ha $f'(b)$ nem nulla, pusztán a monotonitás következménye.
4. Nem igaz, mert még az se biztos, hogy létezik a derivált. Ellenpélda: $f(x)=|x|$, $u=0$

Lagrange-tétel

Innentől kezdve áttérünk az intervallumon értelmezett függvényekre. A Lagrange-tétel szigorúan intervallumon értelmezett függvényekről szól.

Tétel -- Lagrange-féle középértéktétel -- Legyen $f: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható függvény. Ekkor létezik olyan $\xi \in (a,b)$, hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Ugyanis, Legyen

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Olyan g differenciálható függvény adunk meg, melynek pontosan olyan x helyen van nulla deriváltja, ahol $f'(x)=m$. Transzformáljuk el az f függvényt az $l(x)=m(x-a)$ függvénnyel. Ezzel a $g(x) = f(x) - l(x)$ olyan lesz, hogy $g(a)=f(a)=g(b)$. 1) g folytonos, így a Weierstrass-tétel miatt felveszi mindkét típusú extrémumát. 2) van szélsőértéke a nyílt (a,b) -n. Esetszétválasztással. Ha $\max=\min=f(a)$, akkor a függvény konstans, így van belül extrémum. Ha bármelyik nem $f(a)$, akkor az a valamelyik nem lehet a -ban vagy b -ben (mert ezekben $g=f(a)$). 3) alkalmazhatjuk a Fermat-féle szélsőértéktételt, így $g'(\xi)=0$, azaz $f'(\xi)=m$.

3. Feladat. Igaz-e, hogy ha f differenciálható, akkor bármely pontjára teljesül a fenti kijelentés?

Megoldás. Nem: $f(x)=-1$, ha $x < 0$, $f(x)=1$, ha $x > 0$, differenciálható, de az $[-1,1]$ -re az $1/2$ -et sosem veszi fel a derivált.

Monotonitás differenciális feltételei

Tétel. $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható. Ekkor a következő két kijelentés ekvivalens egymással:

1. f monoton növekvő,
2. minden $x \in I$ -re $f'(x) \geq 0$

Ugyanis, 1) $\rightarrow$ 2) $a < x \in I$ -re: a monotonitásból:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geq 0 & / : (x - a) \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\geq 0 \end{aligned}$$

$x < a \in I$ -re: a monotonitásból:

$$0 \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

azaz a különbséghányados függvény mindenütt nemnegatív (amit úgy nevezünk, hogy a függvény az a -ban lokálisan nő), azaz ennek határértéke sem lehet negatív. 2) $\rightarrow$ 1) minden $a < b \in I$ -re:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \geq 0 \quad / \cdot (b - a)$$

$$f(b) - f(a) \geq 0$$

azaz f monoton n?.

Tétel. $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható. Ha minden $x \in I$ -re $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növekv?.

Ugyanis, inden $a < b \in I$ -re:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) > 0 \quad / \cdot (b - a)$$

$$f(b) - f(a) > 0$$

azaz f szigorúan monoton n?.

4. Feladat. Igaz-e?

1. Ha f monoton n?, akkor f' nemnegatív.
2. Ha f monoton n?, és mindenhol differenciálható, akkor f' nemnegatív.
3. Ha f mindenhol differenciálható és f' mindenhol nemnegatív, akkor f monoton n?.
4. Ha f intervallumon differenciálható és szigorúan monoton n?, akkor f' pozitív.

Megoldás.

1. Ha úgy értjük, hogy mindenhol diffható és f' nemnegatív, akkor nem ha úgy, hogy csak ahol f' létezik, akkor igaz.
2. Igen, mert ekkor lokálisan is monoton n?.
3. Nem, $f(x) = -1/x$ deriváltja mindenhol létezik, mindenhol nemnegatív és mégsem monoton n? (csak intervallumonként n?)
4. Nem, $f(x) = x^3$ szig. mon n?, de 0-ban a derivált 0.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x > 0$, akkor $f(x) = \ln(1+x) - x + 1/2x^2 > 0$!

Megoldás. Mivel 0-ban folytonosan kiterjeszthet?, ezért ha a kiterjesztés szigorúan monoton növekv? lenne, akkor fennállna a kijelentés. Ehhez az kell, hogy a derivált $(0, +\infty)$ -en pozitív legyen:

$$\frac{1}{1+x} - 1 + x > 0$$

A baloldali függvény negativitására abból következtethetünk, hogy szigorúan monoton növekv? a folytonos kiterjesztése (ami létezik, 0-ban 1), amihez az kell, hogy a deriváltja $(0, +\infty)$ -en pozitív legyen:

$$-\frac{1}{(1+x)^2} + 1 > 0$$

ami fennáll, hiszen ez pont azt mondja, hogy

$$1 > \frac{1}{(1+x)^2}$$

azaz

$$1 < (1+x)^2$$

A függvényvizsgálat differenciális eszközei

Határértékek az értelmezési tartomány határpontjaiban

Ezt a határérték és műveletek kapcsolatára vonatkozó tételekből, vagy differenciálható, intervallumon értelmezett függvénynél, ha a határérték határozatlan alakú, akkor L'Hospital-szabállyal állapítjuk meg.

Az első derivált vizsgálata

Láttuk a monotonitás differenciális jellemzését:

$$\begin{aligned} f \in \text{Diff}(I) : \quad f \in M^{\leq} &\Leftrightarrow f' \geq 0 \\ f \in \text{Diff}(I) : \quad f \in M^{\geq} &\Leftrightarrow f' \leq 0 \end{aligned}$$

A szélsőértékre és annak jellegére az első deriváltból a következő módon következtethetünk:

Tétel. -- Első derivált próba -- Legyen az $f(a,b) \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható az $(a,u) \cup (u,b)$ halmazon és folytonos u -ban. Ekkor:

1. ha $f' < 0$ (a,u) -n és $f' > 0$ (u,b) -n, akkor u -ban minimum van,
2. ha $f' < 0$ (a,u) -n és $f' > 0$ (u,b) -n, akkor u -ban maximum van,
3. ha azonos előjelű mindenhol, akkor biztosan nincs szélsőérték
4. ellenkező esetben a próba nem jár sikerrel.

Világos, hogy ehhez kell a monotonitási vizsgálat.

A második derivált vizsgálata

A görbületre vonatkozó differenciális feltétel:

$$\begin{aligned} f \in \text{Diff}^2(I) : \quad f \in \text{Konv} &\Leftrightarrow f'' \geq 0 \\ f \in \text{Diff}^2(I) : \quad f \in \text{Konk} &\Leftrightarrow f'' \leq 0 \end{aligned}$$

A szélsőértékkel analóg fogalom itt az *inflexiós pont*, mely eleve a differenciális feltétellel definiált: azt mondjuk, hogy az $u \in I$ pont inflexiós pontja az $f \in \text{Diff}^2(I)$ függvénynek, ha abban a pontban a második derivált előjelet vált.

Érdekes még megjegyezni a szélsőértékre vonatkozó másodikderivált próbát, mely lokális abban az értelemben, hogy pusztán csak a második derivált pontbeli értéke a döntő:

Tétel. -- Másodikderivált próba -- Legyen $f \in C^2(I)$ olyan, hogy az $u \in \text{int}(I)$ pontban $f'(u)=0$. Ekkor

- ha $f''(u) > 0$, akkor u -ban f -nek u -ban lokális minimuma van,
- ha $f''(u) < 0$, akkor u -ban f -nek u -ban lokális maximuma van,
- más esetekben a próba nem jár sikerrel.

A tétel így, azaz a kétszeri folytonos differenciálhatóság megkövetelésével kimondva világos. Az első esetben u egy környezetében f' pozitív, azaz f szigorúan monoton növekszik, azaz a f a 0-n áthaladtában előjelet vált, így az első derivált próba szerint ott szélsőértéke van (éspedig minimum). A másik eset analóg ezzel.

Feladat Vizsgáljuk meg monotonitását, szélsőértékét és görbület szempontjából a következő függvényeket!

$$f(x) = x \ln x$$

$$f(x) = e^x(x^2 + 1)$$

$$f(x) = e^x |x|$$