

Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Tartalomjegyzék

- 1 Teljes differenciálhatóság, gyakorlás
- 2 Iránymenti deriválhatóság és differenciálhatóság
- 3 Széls?érték szükséges feltétele
 - ◆ 3.1 Példa
- 4 Magasabbrend? parciális deriváltak
- 5 Többváltozós függvény széls?értéke
 - ◆ 5.1 Másodikderivált-próba
 - ◇ 5.1.1 Példák

Teljes differenciálhatóság, gyakorlás

1. Hol deriválható?

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$$

2. Hol deriválható?

$$\begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Iránymenti deriválhatóság és differenciálhatóság

Ha e tetsz?leges egységvektor, akkor

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + te) - f(u)}{t} = \partial_e f(u) = [\text{grad } f(u)] \cdot e = [\nabla f(u)] \cdot e$$

Példa.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ekkor

$$J^f(0, 0) = [0, 0]$$

Ha tehát differenciálható, akkor az **iránymenti deriváltak** (Gateau-deriváltak) is léteznek (e egységvektor):

$$\partial_e f(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + te) - f(u)}{t} = J^f(0, 0) \cdot e = e \cdot \text{grad } f(u)$$

Ám, polárkoordinátákra áttérve:

$$f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r} = r \cos \varphi \sin \varphi = r \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

= $\pi/4$ -et és $3\pi/4$ -et véve a vetületfüggvény a

$$t \mapsto \frac{1}{2}|t|,$$

ami nem differenciálható a 0-ban.

Illetve nézzük meg a (3,4) vektor mentén!

Megjegyzés. Persze abból, hogy az összes iránymenti derivált létezik, abból nem következik, hogy a függvény totálisan deriválható.

Széls?érték szükséges feltétele

Egyel?re állapodjunk meg abban, hogy gradiensnek nevezzük a következ? többváltozós vektorérték? függvényt: ha $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ parciálisan differenciálható, akkor

$$\text{grad } f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

mely lényegében az f elsőrend? parciális deriváltjaiból képezett vektor.

Kés?bb a gradienst egy kissé másképp fogjuk értelmezni és amit most definiáltunk, az a gradiens sztenderd bázisbeli mátrixa lesz (adott pontra vonatkozóan).

Tétel - Fermat-féle széls?értéktétel - Legyen $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $u \in \text{int Dom}(f)$, f parciálisan differenciálható u -ban.

Ha u -ban f -nek (lokális) széls?értéke van, akkor

$$\text{grad } f(u) = 0_{\mathbf{R}^n}$$

U.i.s: minden i -re az i -edik parciális függvénynek széls?értéke van u_i -ben, így az egyváltozós Fermat-tétel miatt ezeknek a deriváltja u_i -ben 0, így a gradiens értéke 0.

Példa

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

Ennek gradiense:

$$\text{grad } f(x, y) = (2xy^2, 2yx^2)$$

Az

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } 2xy^2 = 0 \\ \text{II. } 2yx^2 = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $x = 0$, y tetszőleges ill. $y = 0$ és x tetszőleges. A szélsőértékek helyei csak ezek közül kerülhetnek ki és ezek valóban szélsőértékek is, mert ezeken a függvény 0-t vesz fel, ami a lehetséges legkisebb értéke.

Magasabbrendű parciális deriváltak

Ha f parciálisan deriválható, akkor $\partial_x f$ és $\partial_y f$ szintén kétváltozós függvények (a pontonként a deriváltak, mint függvényértékek értelmezésével) és érdeklődhetünk ezek parciális differenciálhatóságuk iránt. Például:

$$f(x, y) = x^2 y^4 + x^5 - y^3$$

$$\partial_x f(x, y) = xy^4 + 5x^4$$

$$\partial_y f(x, y) = x^2 4y^3 - 3y^2$$

$$\partial_x(\partial_x f)(x, y) = y^4 + 20x^3$$

$$\partial_y(\partial_y f)(x, y) = 12x^2 y^2 - 6y^2$$

$$\partial_y(\partial_x f)(x, y) = x4y^3$$

$$\partial_x(\partial_y f)(x, y) = 4xy^3$$

És valóban:

Tétel. (Young-tétel) Ha a másodrendű parciális deriváltak léteznek az u egy környezetében és folytonosak az u pontban, akkor az u -beli vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlők:

$$\partial_x(\partial_y f)(u) = \partial_y(\partial_x f)(u)$$

Azaz az alábbi, úgy nevezett Hesse-mátrix szimmetrikus:

$$H^f(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(u)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(u)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Feladat. Az a kitétel, hogy az u -ban a másodrendű parciális deriváltak folytonosak, nem hagyható el, ugyanis. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Ekkor a 0-ban nem egyenlő a két vegyes parciális derivált.

Tekintsük a parciális deriváltakat:

$$\partial_x(\partial_y f)(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\partial_y f)(x, 0) - (\partial_y f)(0, 0)}{x}$$

Példa

$$\begin{aligned}\partial_y(\partial_x f)(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\partial_x f)(0,y) - (\partial_x f)(0,0)}{y} \\ \partial_x(\partial_x f)(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\partial_x f)(x,0) - (\partial_x f)(0,0)}{x} \\ \partial_y(\partial_y f)(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\partial_y f)(0,y) - (\partial_y f)(0,0)}{y}\end{aligned}$$

Ehhez tehát elegendő kiszámítani a következő függvényeket: $y \mapsto (\partial_x f)(0,y)$, $x \mapsto (\partial_y f)(x,0)$. Ehhez a parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}\partial_x f(0,y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,y) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{ha } y = 0 \\ -y, & \text{ha } y \neq 0 \end{cases} \\ \partial_y f(x,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x,t) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ x, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases} \\ \partial_y f(0,y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,y+t) - f(0,0)}{t} = 0 \\ \partial_x f(x,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t,0) - f(0,0)}{t} = 0\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a $g=(\partial_x f, \partial_y f)$ függvény $(0,0)$ -beli parciális deriváltjai nem lehetnek folytonosak, mert ott a függvény nem totálisan diffható. Ugyanis a g Jacobi-mátrixa:

$$J^g(0,0) = H^f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ami a 90°-os forgatás. Ekkor a g -t a $(t,0)$ vektorral közelítve a 0 -ba:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t,0) - g(0,0) - J^g(0,0) \cdot (t,0)}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(0,-t)}{|t|} \neq (0,0)$$

márpedig ha g minden parciális deriváltja folytonos lenne a $(0,0)$ -ban, akkor g totálisan is deriválható lenne.

Többváltozós függvény szélsőértéke

$$f(x) = f(u) + J_u^f(x-u) + (x-u)H_u^f(x-u) + \varepsilon(x)||x-u||^2$$

Másodikderivált-próba

Kétszer differenciálható függvényre vonatkozóan megfogalmazhatjuk a lokális maximum és minimum létezésének elégséges feltételét. Csak a kétváltozós függvényekkel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy $\text{grad } f(u) = 0$ és $H^f(u)$ az f Hesse-mátrixa

1. ha $\det H^f(u) > 0$ és $\partial_1^2 f(u) < 0$, akkor f -nek u -ban **maximuma** van
2. ha $\det H^f(u) > 0$ és $\partial_1^2 f(u) > 0$, akkor f -nek u -ban **minimuma** van
3. ha $\det H^f(u) < 0$, akkor f -nek biztosan nincs szélsőértéke, ún. **nyeregpontja** van
4. ha $\det H^f(u) = 0$, akkor a próba nem járt sikerrel, azaz további vizsgálatokat igényel annak eldöntése,

hogyan u szélsőérték hely-e.

Megjegyzések. Mivel kétváltozós esetben

$$\det H^f(u) = \partial_{11}^2 f(u) \cdot \partial_{22}^2 f(u) - (\partial_{12}^2 f(u))^2$$

ezért olyan eset nem létezik, hogy $\det H^f(u) > 0$ és $\partial_{11}^2 f(u) = 0$.

Világos, hogy a második derivált tipikusan azoknál a függvényeknél jár sikerrel, melyeket egy másodfokú függvény közelít a legjobban (aszimptotikusan másodfokúak). Ha a függvény ennél magasabb fokú, akkor a második deriváltak eltérnek és a Hesse-mátrix elfajul (vagy legalább is tipikusan elfajul).

Ha tehát

$$H^f(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ akkor } \det H^f(u) = AC - B^2,$$

és így a tipikus példák a következők.

Példák

1. Ha B kicsi, azaz az AC -hez képest kis abszolútértékű szám, akkor a szélsőérték irányába mozdul el a feladat.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (2x + y, 2y + x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz $4 - 1 = 3 > 0$ és $2 > 0$ miatt minimum.

2. Ha $|B|$ nagy (azaz AC -hez képest nagy), akkor a bizonyosan nemszélsőérték irányába.

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (2x - 3y, 2y - 3x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz $4 - 9 = -5 < 0$ miatt nincs szélsőérték: nyeregpont.

3. Negatív A és C -re és kis B -re:

$$f(x, y) = -x^2 + xy - y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (-2x + y, -2y + x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

azaz $4 - 1 = 3 > 0$ és $-2 < 0$ miatt maximum.

4. Ha A és C eljele ellenkező, akkor rögtön következik, hogy nincs szé.

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (2x + y, -2y + x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

azaz $-4 - 1 = -5 < 0$ azaz nyeregpont.

5. Atipikus eset, ha $AC = B^2$. Ekkor nem jár sikerrel a próba:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (2x + 2y, 2y + 2x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz $4 - 4 = 0$, azaz határozatlan eset. De tudjuk, hogy

$$f(x, y) = (x + y)^2$$

ami pontosan akkor minimális, ha $x = -y$, azaz ezeken a helyeken van szélsőérték.

6.

$$f(x, y) = 3x^2 - 6xy + 2y^3$$

7.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

pótló gyakorlat 5. gyakorlat