

Differenciálhatóság

A többváltozós differenciálhatóságot az egyváltozós alábbi átfogalmazásából általánosítjuk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u) - m(x-u)}{|x-u|} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow u+} \frac{f(x) - f(u) - m(x-u)}{x-u} &= 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow u-} \frac{f(x) - f(u) - m(x-u)}{-(x-u)} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow u+} \left(\frac{f(x) - f(u)}{x-u} - m \right) &= 0, \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow u-} \left(\frac{f(x) - f(u)}{x-u} - m \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow u+} \frac{f(x) - f(u)}{x-u} &= m, \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow u-} \frac{f(x) - f(u)}{x-u} = -m \\ \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x-u} &= m \end{aligned}$$

Definíció. Legyen $f: \mathbf{R}^n \supset \rightarrow \mathbf{R}^m$ és $u \in \text{Dom}(f)$. Azt mondjuk, hogy f **differenciálható** az u pontban, ha létezik olyan $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u) - A(x-u)}{\|x-u\|_{\mathbf{R}^n}} = 0_{\mathbf{R}^m}$$

Ekkor A egyértelmű és az f leképezés u -bent belüli **differenciáljának** nevezzük és $df(u)$ -val vagy $Df(u)$ -val jelöljük. Ezt a fogalmat néha *teljes differenciálnak*, *totális differenciálnak* vagy *Fréchet-deriválnak* is mondjuk.

Megjegyzés. A fenti határérték 0 volta egyenértékű a következő kijelentéssel. Létezik $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés és $\varepsilon: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbf{R}^m$ függvény, melyre:

$$\varepsilon(u) = 0, \text{ továbbá}$$

minden $x \in \text{Dom}(f)$ -re:

$$f(x) = f(u) + A(x-u) + \varepsilon(x)\|x-u\|$$

Megjegyzés. Azt, hogy A egyértelmű, a következőkkel bizonyíthatjuk. Legyen A és B is a mondott tulajdonságú, azaz létezzenek ε és η az u -ban eltérő és ott folytonos $\text{Dom}(f)$ -en értelmezett függvények, melyekre teljesül, hogy minden $x \in \text{Dom}(f)$ -re

$$\begin{aligned} f(x) &= f(u) + A(x-u) + \varepsilon(x)\|x-u\| \\ f(x) &= f(u) + B(x-u) + \eta(x)\|x-u\| \end{aligned}$$

ezeket kivonva egymásból és használva **minden** x -re:

$$(A-B)(x-u) + (\varepsilon(x) - \eta(x))\|x-u\| = 0$$

így minden $x = u + ty$ értékre is az azonosan nullát kapjuk, ha t pozitív szám, y pedig rögzített nemnulla vektor, azaz minden t -re

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B})ty + (\varepsilon(u + ty) - \eta(u + ty))\|ty\| = 0$$

az azonosan 0 függvény határértéke $t \rightarrow 0$ esetén szintén nulla:

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{B})(ty) + (\varepsilon(u + ty) - \eta(u + ty))\|ty\|}{t} = (\mathcal{A} - \mathcal{B})y$$

hiszen t -t kiemelhetünk és egyszeresíthetünk és $t \rightarrow 0$ esetén és nullává válik. Ez viszont pont azt jelenti, hogy a két lineáris operátor azonosan egyenlő.

Jacobi-mátrix

A $df(u)$ lineáris leképezés $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ szetenderd bázisbeli mátrixa legyen: $[df(u)] = \mathbf{A}$. Vizsgáljuk mibe viszi a bázisokat $df(u)$ leképezés!

Írjuk fel a definíciót, de az e_1 egységvektor mentén tartsunk u -hoz: $x = u + te_1$. Ekkor

$$x - u = te_1$$

ami azért hasznos, mert a

$$\mathcal{A}(x - u) = \mathcal{A}(te_1)$$

alakból kiemelhető t :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + te_1) - f(u) - \mathcal{A}(te_1)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + te_1) - f(u) - t \cdot \mathcal{A}(e_1)}{t} = \\ &= -\mathcal{A}(e_1) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + te_1) - f(u)}{t} \end{aligned}$$

azaz

$$\mathcal{A}(e_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + te_1) - f(u)}{t} = \partial_1 f(u)$$

vagyis f koordinátafüggvényeinek az első változó szerinti parciális deriváltja az u pontban. A többi oszlopvektor ugyanígy:

$$[df(u)] = \mathbf{J}^f(u) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(u) & \partial_2 f_1(u) & \dots & \partial_n f_1(u) \\ \partial_1 f_2(u) & \partial_2 f_2(u) & \dots & \partial_n f_2(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(u) & \partial_2 f_m(u) & \dots & \partial_n f_m(u) \end{bmatrix}$$

amelyet **Jacobi-mátrix**nak nevezünk.

Következmény. Tehát, ha f totálisan differenciálható, akkor parciálisan is differenciálható és a differenciál sztenderd bázisbeli mátrixa a Jacobi-mátrix.

Azaz:

teljes differenciálhatóság $\implies$ **parciális** differenciálhatóság

de ez fordítva már nem igaz:

parciális differenciálhatóság $\nRightarrow$ **teljes** differenciálhatóság

Erre vonatkozik a két alábbi példa.

4. gyakorlat 6. gyakorlat