

Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Tartalomjegyzék

- 1 Széls?érték szükséges feltétele
 - ◆ 1.1 Példa
- 2 Magasabbrend? parciális deriváltak
- 3 Többváltozós függvény széls?értéke
 - ◆ 3.1 Másodikderivált próba
 - ◇ 3.1.1 Példák
- 4 Kiegészítés
 - ◆ 4.1 Skalárfüggvények szorzata
 - ◇ 4.1.1 Példa
 - ◆ 4.2 a × ... operátor
 - ◇ 4.2.1 Megoldás
 - ◆ 4.3 a ... operátor
 - ◇ 4.3.1 Megoldás
 - ◆ 4.4 További példa skalárfüggvényre
 - ◇ 4.4.1 Megoldás
 - ◆ 4.5 Indexes deriválás
 - ◇ 4.5.1 1. Példa
 - ◇ 4.5.2 2. Példa
 - ◇ 4.5.3 3. Példa
 - ◆ 4.6 Deriválttenzor és invariánsai
 - ◇ 4.6.1 Skalárfüggvénnyel való szorzás
 - ◇ 4.6.2 Vektorfüggvények skaláris szorzata

Széls?érték szükséges feltétele

Egyel?re állapodjunk meg abban, hogy gradiensnek nevezzük a következ? többváltozós vektorérték? függvényt: ha $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ parciálisan differenciálható, akkor

$$\text{grad } f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

mely lényegében az f els?rend? parciális deriváltjaiból képezett vektor.

Kés?bb a gradienst egy kissé másképp fogjuk értelmezni és amit most definiáltunk, az a gradiens sztenderd bázisbeli mátrixa lesz (adott pontra vonatkozóan).

Tétel - Fermat-tétel - Legyen $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $u \in \text{int Dom}(f)$, f parciálisan differenciálható u -ban.

Ha u -ban f -nek (lokális) széls?értéke van, akkor

$$\text{grad } f(u) = 0_{\mathbf{R}^n}$$

U.is: minden i -re az i -edik parciális függvénynek szélsőértéke van u_i -ben, így az egyváltozós Fermat-tétel miatt ezeknek a deriváltja u_i -ben 0, így a gradiens értéke 0.

Példa

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

Ennek gradiense:

$$\text{grad } f(x, y) = (2xy^2, 2yx^2)$$

Az

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } 2xy^2 = 0 \\ \text{II. } 2yx^2 = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $x = 0$, y tetszőleges ill. $y = 0$ és x tetszőleges. A szélsőértékek helyei csak ezek közül kerülhetnek ki és ezek valóban szélsőértékek is, mert ezeken a függvény 0-t vesz fel, ami a lehetséges legkisebb értéke.

```
set pm3d
```

```
set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

```
splot 5*x*x*y*y
```

Magasabbrendű parciális deriváltak

Ha f parciálisan deriválható, akkor $\partial_x f$ és $\partial_y f$ szintén kétváltozós függvények (a pontonként a deriváltak, mint függvényértékek értelmezésével) és érdeklődhetünk ezek parciális differenciálhatóságuk iránt. Például:

$$f(x, y) = x^2 y^4 + x^5 - y^3$$

$$\partial_x f(x, y) = xy^4 + 5x^4$$

$$\partial_y f(x, y) = x^2 4y^3 - 3y^2$$

$$\partial_x(\partial_x f)(x, y) = y^4 + 20x^3$$

$$\partial_y(\partial_y f)(x, y) = 12x^2 y^2 - 6y$$

$$\partial_y(\partial_x f)(x, y) = x 4y^3$$

$$\partial_x(\partial_y f)(x, y) = 4xy^3$$

És valóban:

Tétel. (Young-tétel) Ha a másodrendű parciális deriváltak léteznek az u egy környezetében és folytonosak az u pontban, akkor az u -beli vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlők:

$$\partial_x(\partial_y f)(u) = \partial_y(\partial_x f)(u)$$

Azaz az alábbi, úgy nevezett Hesse-mátrix szimmetrikus:

$$H^f(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(u)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(u)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Feladat. Az a kitétel, hogy az u -ban a másodrendű parciális deriváltak folytonosak, nem hagyható el, ugyanis. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Ekkor a 0-ban nem egyenlő a két vegyes parciális derivált.

Tekintsük a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} \partial_x(\partial_y f)(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\partial_y f)(x, 0) - (\partial_y f)(0, 0)}{x} \\ \partial_y(\partial_x f)(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\partial_x f)(0, y) - (\partial_x f)(0, 0)}{y} \\ \partial_x(\partial_x f)(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\partial_x f)(x, 0) - (\partial_x f)(0, 0)}{x} \\ \partial_y(\partial_y f)(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\partial_y f)(0, y) - (\partial_y f)(0, 0)}{y} \end{aligned}$$

Ehhez tehát elegendő kiszámítani a következő függvényeket: $y \mapsto (\partial_x f)(0, y)$, $x \mapsto (\partial_y f)(x, 0)$. Ehhez a parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} \partial_x f(0, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y) - f(0, 0)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{ha } y = 0 \\ -y, & \text{ha } y \neq 0 \end{cases} \\ \partial_y f(x, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t) - f(0, 0)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ x, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases} \\ \partial_y f(0, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, y + t) - f(0, 0)}{t} = 0 \end{aligned}$$

$$\partial_x f(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

Megjegyezzük, hogy a $g=(\partial_x f, \partial_y f)$ függvény $(0,0)$ -beli parciális deriváltjai nem lehetnek folytonosak, mert ott a függvény nem totálisan diffható. Ugyanis a g Jacobi-mátrixa:

$$J^g(0, 0) = H^f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ami a 90°-os forgatás. Ekkor a g -t a $(t,0)$ vektorral közelítve a 0 -ba:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t, 0) - g(0, 0) - J^g(0, 0) \cdot (t, 0)}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(0, -t)}{|t|} \neq (0, 0)$$

márpedig ha g minden parciális deriváltja folytonos lenne a $(0,0)$ -ban, akkor g totálisan is deriválható lenne.

Többváltozós függvény szélsőértéke

Másodikderivált próba

Kétszer differenciálható függvényre vonatkozóan megfogalmazhatjuk a lokális maximum és minimum létezésének elégséges feltételét. Csak a kétváltozós függvényekkel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy $\text{grad } f(u) = 0$ és $H^f(u)$ az f Hesse-mátrixa

1. ha $\det H^f(u) > 0$ és $\partial_{11} f(u) < 0$, akkor f -nek u -ban **maximuma** van
2. ha $\det H^f(u) > 0$ és $\partial_{11} f(u) > 0$, akkor f -nek u -ban **minimuma** van
3. ha $\det H^f(u) < 0$, akkor f -nek biztosan nincs szélsőértéke, ún. **nyeregpon**tja van
4. ha $\det H^f(u) = 0$, akkor a próba nem járt sikerrel, azaz további vizsgálatokat igényel annak eldöntése, hogy u szélsőérték hely-e.

Megjegyzések. Mivel kétváltozós esetben

$$\det H^f(u) = \partial_{11} f(u) \cdot \partial_{22} f(u) - (\partial_{12} f(u))^2$$

ezért olyan eset nem létezik, hogy $\det H^f(u) > 0$ és $\partial_{11} f(u) = 0$.

Világos, hogy a másodikderivált tipikusan azoknál a függvényeknél jár sikerrel, melyeket egy másodfokú függvény közelít a legjobban (aszimptotikusan másodfokúak). Ha a függvény ennél magasabb fokú, akkor a második deriváltak eltűnnek és a Hesse-mátrix elfajul (vagy legalább is tipikusan elfajul).

Ha tehát

$$H^f(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ akkor } \det H^f(u) = AC - B^2,$$

és így a tipikus példák a következők.

Példák

1. Ha B kicsi, azaz az AC-hez képest kis abszolútréték? szám, akkor a széls?érték irányába mozdul el a feladat.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

Ekkor $\text{grad} f = (2x + y, 2y + x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz $4 - 1 = 3 > 0$ és $2 > 0$ miatt minimum.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot x*x+x*y+y*y

2. Ha |B| nagy (azaz AC-hez képest nagy), akkor a bizonyosan nemszéls?érték irányába.

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$$

Ekkor $\text{grad} f = (2x - 3y, 2y - 3x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz $4 - 9 = -5 < 0$ miatt nincs széls?érték: nyeregpont.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot x*x -3*x*y+y*y

3. Negatív A és C-re és kis B-re:

$$f(x, y) = -x^2 + xy - y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (-2x + 3y, -2y + 3x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

azaz $4 - 1 = 3 > 0$ és $-2 < 0$ miatt maximum.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot -x*x +x*y-y*y

4. Ha A és C el?jele ellenkez?, akkor rögtön következik, hogy nincs sz.é.

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (2x + y, -2y + x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

azaz $-4 - 1 = -5 < 0$ azaz nyeregpont.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot x*x +x*y-y*y

5. Atipikus eset, ha $AC = B^2$. Ekkor nem jár sikerrel a próba:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (2x + 2y, 2y + 2x)$ és

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz $4 - 4 = 0$, azaz határozatlan eset. De tudjuk, hogy

$$f(x, y) = (x + y)^2$$

ami pontosan akkor minimális, ha $x = -y$, azaz ezeken a helyeken van szélsőérték.

```
set pm3d
```

```
set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

```
splot (x+y)*(x+y)
```

Kiegészítés

Skalárfüggvények szorzata

, $\mu: H \rightarrow \mathbf{R}$, ahol $H \subset \mathbf{R}^n$ és az $u \in H$ -ban mindkettő differenciálható, akkor $\lambda\mu$ is és

$$[d(\lambda\mu)(u)]_{1j} = \partial_j(\lambda\mu) = \mu\partial_j\lambda + \lambda\partial_j\mu = [\mu(u).\text{grad } \lambda(u) + \lambda(u).\text{grad } \mu(u)]_j$$

azaz

$$\text{grad}(\lambda\mu)(u) = \mu(u).\text{grad } \lambda(u) + \lambda(u).\text{grad } \mu(u)$$

Példa

Számoljuk ki r^2 deriváltját a szorzat szabálya szerint.

Egyrészt, ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\text{grad } r^2 = \text{grad } |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{r}| = 2|\mathbf{r}|.\text{grad } |\mathbf{r}| = 2|\mathbf{r}| \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = 2\mathbf{r}$$

Másrészt, ha $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, akkor

Kiegészítés

$$\mathbf{r}^2 = 0 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{r} + |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{r}|$$

minden \mathbf{r} -re fennáll, így $\text{grad}(\mathbf{r}^2)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ alkalmas az $(\mathbf{r})=|\mathbf{r}|$ -rel, tehát \mathbf{r}^2 differenciálható 0-ban is.

$\mathbf{a} \times \dots$ operátor

Differenciálható-e és ha igen mi a differenciálja, divergenciája, rotációja a

$$\mathbf{v} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3; \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$$

leképezésnek, ahol \mathbf{a} el?re megadott konstans vektor.

Megoldás

Az $\mathbf{a} \times \dots$, azaz az

$$\mathbf{a} \times \mathbf{I}$$

(itt \mathbf{I} az identitás leképezés) leképezés lineáris, minthogy a vektoriális szorzás mindkét változójában lineáris ($\mathbf{v} \in \text{Lin}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$), így differenciálható és differenciálja saját maga:

$$d(\mathbf{a} \times \mathbf{I})(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{I}$$

azaz

$$(d(\mathbf{a} \times \mathbf{I})(\mathbf{r}))\mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h}$$

minden \mathbf{h} és $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ vektorra.

Jacobi-mátrixa (a sztenderd bázisbeli mátrixa) tetsz?leges (x,y,z) pontban:

$$\mathbf{J}^{\mathbf{a} \times \mathbf{I}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel a f?átl?beli elemek mind nullák, ezért ebb?l r?gt?n következik, hogy $\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{I})(\mathbf{r}) = 0$.

$$\begin{aligned} [\text{rot } \mathbf{v}]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} a_l x_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_l \partial_j x_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_l \delta_{jm} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klj} a_l = \\ &= \delta_{kk} \delta_{il} a_l - \delta_{ki} \delta_{lk} a_l = 3a_i - a_i = 2a_i \end{aligned}$$

azaz $\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$. Az el?bb felhasználtuk a kett?s vektoriális szorzatra vonatkozó kifejtési tétel indexes alakját, a

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{jm} \delta_{li} - \delta_{jl} \delta_{im}$$

ami azt mondja, hogy ha az ijk és klm -ben a nem azonos párok jó sorrendben következnek, akkor az epszolon 1-et, ha rossz sorrendben, akkor -1-et ad.

a · ... operátor

Differenciálható-e és ha igen mi a differenciálja

$$\Phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}; \quad \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$$

leképezésnek, ahol \mathbf{a} előre megadott konstans vektor.

Megoldás

Skalártér lévén gradiensét kell kiszámolnunk. Mivel ez is lineáris leképezés, ezért differenciálható és differenciálja saját maga, azaz a gradiens vektor pont \mathbf{a} :

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}$$

Ezt persze indexes deriválással is kiszámítható:

$$[\text{grad} \Phi]_i = \partial_i a_k x_k = a_k \partial_i x_k = a_k \delta_{ik} = a_i$$

További példa skalárfüggvényre

Határozzuk meg a

$$\Phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}; \quad \Phi(\mathbf{r}) = |\mathbf{i} \times \mathbf{r}|$$

(ahol \mathbf{i} az x irányú egységvektor, l.l a vektor hossza) függvény szintvonalait, differenciálhatóságát, gradiensét!

Megoldás

Érdemes koordinátás írásmódra áttérni, hiszen az \mathbf{i} vektor úgy is a koordinátarendszerhez kapcsolódik. A vektoriális szorzás definíciója miatt

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| \cdot \sin(\mathbf{i}, \mathbf{r})_{\perp} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

Tehát azok a pontok vannak azonos szintfelületen, melyeknek az $[yz]$ síkra vett vetületük azonos hosszúságú ($\mathbf{i} \times \mathbf{r}$ hossza az \mathbf{i} -re merőleges komponense \mathbf{r} -nek). Az

$$y^2 + z^2 = 0$$

egyenlettel megadott pontokban (másként: $y = 0$ & $z = 0$ & x tetszőleges) a függvény nem differenciálható, ugyanis a $=0$ szintfelület elfajult módon csak egy egyenes, az x tengely, így a gradiens vektor iránya nem egyértelmű. Ezt azzal is igazolhatjuk, ha vesszük ezekben a pontokban például az y irányú parciális függvényt:

$$\Phi(x_0, 0 + t, 0) = \sqrt{t^2} = |t|$$

azaz az $(x_0, 0, 0)$ pontokhoz tartozó $(x_0, \cdot, 0)$ parciális függvény nem differenciálható a 0-ban.

Máshol a gradiensvektor, a parciális deriváltakat kiszámítva

$$\text{grad } \Phi(x, y, z) = \left(0, \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right)$$

vagy másként:

$$\text{grad } \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{i} \times \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{i} \times \mathbf{r}|}$$

Megjegyezzük, hogy ehhez még a függvénykompozíció deriválási szabályával is lejuthattunk volna:

$$\text{grad } \Phi(\mathbf{r}) = \text{grad} \sqrt{(\mathbf{i} \times \mathbf{r})^2} = \frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{i} \times \mathbf{r})^2}} \cdot 2(\mathbf{i} \times \mathbf{r}) \times (-\mathbf{i})$$

Indexes deriválás

Most csak a sokféle szorzat deriváltjának értékét számítjuk ki. Minden esetben igazolható, hogy ha a formulákban szereplő összes derivált létezik, akkor a formula érvényes (sőt, ha a függvények az adott pontban differenciálhatók, akkor a szorzat is differenciálható az adott pontban). Az mátrixelemeket indexesen számítjuk.

Feltéve például, hogy az f többváltozós skalárfüggvény parciálisan differenciálható, a gradiens elemeit így nyerjük:

$$[\text{grad } f]_i = \partial_i f$$

1. Példa

Ha $f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^2 &= \sum_{k=1}^3 [\mathbf{r}]_k [\mathbf{r}]_k = \sum_{k=1}^3 x_k x_k = [\text{Einstein konv.}] x_k x_k \\ [\text{grad } f]_i &= \partial_i x_k x_k = x_k \partial_i x_k + x_k \partial_i x_k \end{aligned}$$

de a koordinátafüggvények deriváltjairól tudjuk, hogy azoknak az értékét a Kronecker-delta adja:

$$\partial_i x_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = k \\ 0, & \text{ha } i \neq k \end{cases}$$

azaz

$$[\text{grad } f]_i = 2x_k \delta_{ik} = 2x_i = [2\mathbf{r}]_i$$

tehát parciálisan differenciálható minden pontban és a Jacobi-mátrix elemei a fentiek.

2. Példa

Ha $f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$, akkor

$$[\text{grad } f]_i = \partial_i a_k x_k = a_k \partial_i x_k = a_k \delta_{ik} = a_i = [\mathbf{a}]_i$$

3. Példa

Ha $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^\alpha$, akkor

$$[\text{grad } f]_i = \partial_i (x_k x_k)^{\alpha/2} = \partial_i (x_k)^\alpha = \frac{\alpha}{2} (x_k x_k)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2 \delta_{ik} x_k$$

itt ne feledjük, hogy k-ra szummázunk és hogy az összetett tényezőben a skaláris szorzat szerepel:

$$[\text{grad } f]_i = \alpha (x_k x_k)^{\frac{\alpha}{2}-1} x_i = \left[\alpha |\mathbf{r}|^{\alpha-2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right]_i = \left[\alpha |\mathbf{r}|^{\alpha-1} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} \right]_i$$

tehát parciálisan differenciálható minden pontban és a Jacobi-mátrix elemei a fentiek.

Deriválttenzor és invariánsai

Ha \mathbf{A} az $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ leképezés differenciálja az u pontban, akkor \mathbf{A} -t deriválttenzornak nevezzük. Minden tenzor egyértelműen elbontható szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegeként:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a$$

Ebből a szimmetrikus rész főátlbeli elemeinek összege minden bázisban ugyanaz a skaláris érték, melyet a tenzor nyomának, illetve a függvény divergenciájának nevezzük:

$$\text{div}(f)(u) = \text{trace}(\mathbf{A}) \quad \text{illetve} \quad \text{div}(f) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i = * \partial_i f_i *$$

Az utóbbi írásmód a koordinátás alakban az úgy nevezett Einstein-féle jelölési konvenció, amelynek elve, hogy a kétszer szereplő indexekre automatikusan szumma értendő.

Példa

$$\text{div } \mathbf{r} = \partial_k x_k = \delta_{kk} = \dim(\mathbf{R}^n) = n$$

$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ esetben a tenzor antiszimmetrikus részéhez egyértelműen létezik egy olyan \mathbf{a} vektor, hogy minden \mathbf{r} -re:

$$\mathbf{A}_a \mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$$

mely vektort az f rotációjának nevezzük:

$$\text{rot } f(u) \quad \text{és} \quad [\text{rot } f(u)]_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k = * \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k *$$

ahol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (ijk) \in \{(123), (231), (312)\} \\ -1, & \text{ha } (ijk) \in \{(321), (213), (132)\} \\ 0, & \text{egyebkent} \end{cases}$$

a Levi-Civita-szimbólum.

Skalárfüggvénnyel való szorzás

$\lambda: H \rightarrow \mathbf{R}, f: H \rightarrow \mathbf{R}^m$, ahol $H \subset \mathbf{R}^n$ és az $u \in H$ -ban mindketten differenciálhatók, akkor $\lambda \cdot f$ is és

$$[d(\lambda \cdot f)(u)]_{ij} = \partial_j(\lambda \cdot f)_i = \partial_j \lambda f_i = f_i \partial_j \lambda + \lambda \partial_j f_i$$

azaz

$$d(\lambda \cdot f)(u) = f(u) \otimes \text{grad} \lambda(u) + \lambda(u) \cdot df(u)$$

ahol \otimes a diadikus szorzat, melynek koordinátamátrixa egy oszlopvektor (balról) és egy sorvektor (jobbról) mátrixszorzatából adódik. Ez ritkán kell teljes egészében, a két invariáns (rot-nál csak 3×3-as esetben) a gyakoribb.

$$\begin{aligned} \text{div}(\lambda \cdot f)(u) &= f(u) \cdot \text{grad} \lambda(u) + \lambda(u) \cdot \text{div} f(u) \\ [\text{rot}(\lambda \cdot f)(u)]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \lambda f_k = \varepsilon_{ijk} (\partial_j \lambda) f_k + \lambda \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k = \\ &= [\text{grad} \lambda(u) \times f(u) + \lambda(u) \cdot \text{rot} f(u)]_i \end{aligned}$$

Vektorfüggvények skaláris szorzata

$f, g: H \rightarrow \mathbf{R}^m$, ahol $H \subset \mathbf{R}^n$ és az $u \in H$ -ban mindketten differenciálhatók, akkor $f \cdot g$ is és

$$[d(f \cdot g)(u)]_{1j} = \partial_j(f \cdot g) = \partial_j f_k g_k = f_k \partial_j g_k + g_k \partial_j f_k$$

azaz

$$d(f \cdot g)(u) = (f(u) \cdot) \circ dg(u) + (g(u) \cdot) \circ df(u)$$

illetve a Jacobi-mátrixszal:

$$\mathbf{J}^{f \cdot g}(u) = [f(u)]^T \cdot \mathbf{J}^g(u) + [g(u)]^T \cdot \mathbf{J}^f(u)$$

ahol $[\cdot]^T$ az oszlopvektor transzponáltját, $(v \cdot)$ pedig a v vektorral történő skaláris szorzás operátorát jelöli.