Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Tartalomjegyzék

- 1 Széls?érték szükséges feltétele
    - 1.1 Példa
- 2 Magasabbrend? parciális deriváltak
- 3 Többváltozós függvény széls?értéke
    - 3.1 Másodikderivált próba
        - 3.1.1 Példák
- 4 Kiegészítés
    - 4.1 Skalárfüggvények szorzata
        - 4.1.1 Példa
    - 4.2 a × ... operátor
        - 4.2.1 Megoldás
    - 4.3 a ... operátor
        - 4.3.1 Megoldás
    - 4.4 További példa skalárfüggvényre
        - 4.4.1 Megoldás
    - 4.5 Indexes deriválás
        - 4.5.1 1. Példa
        - 4.5.2 2. Példa
        - 4.5.3 3. Példa
    - 4.6 Deriválttenzor és invariánsai
        - 4.6.1 Skalárfüggvénnyel való szorzás
        - 4.6.2 Vektorfüggvények skaláris szorzata

Széls?érték szükséges feltétele

Egyel?re állapodjunk meg abban, hogy gradiensnek nevezzük a következ? többváltozós vektorérték? függvényt: ha f: $\mathbf{R}^n \supset\!\!\!\to \mathbf{R}$ parciálisan differenciálható, akkor

$$\mathrm{grad}\, f(x) = (\partial_1 f(x), ..., \partial_n f(x))$$

mely lényegében az f els?rend? parciális deriváltjaiból képezett vektor.

Kés?bb a gradienst egy kissé másképp fogjuk értelmezni és amit most definiáltunk, az a gradiens sztenderd bázisbeli mátrixa lesz (adott pontra vonatkozóan).

Tétel - *Fermat-tétel* - Legyen f: $\mathbf{R}^n \supset\!\!\!\to \mathbf{R}$, u int Dom(f), f parciálisan differenciálható u-ban.

Ha u-ban f-nek (lokális) széls?értéke van, akkor

$$\mathrm{grad}\, f(u) = 0_{\mathbf{R}^n}$$

U.is: minden *i*-re az *i*-edik parciális függvénynek széls?értéke van u_i-ben, így az egyváltozós Fermat-tétel miatt ezeknek a deriváltja u_i-ben 0, így a gradiens értéke 0.

Példa

$$f(x,y) = x^2y^2$$

Ennek gradiense:

$$\mathrm{grad}\, f(x,y) = (2xy^2, 2yx^2)$$

Az

$$\left.\begin{array}{lrcl} \mathrm{I.} & 2xy^2 & = & 0 \\ \mathrm{II.} & 2yx^2 & = & 0 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $x = 0$, y tetsz?leges ill. $y = 0$ és x tetsz?leges. A széls?értékek helyei csak ezek közül kerülhetnek ki és ezek valóban széls?értékek is, mert ezeken a függvény 0-t vesz fel, ami a lehetséges legkisebb értéke.

```
      set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot 5*x*x*y*y

Magasabbrend? parciális deriváltak

Ha *f* parciálisan deriválható, akkor $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ szintén kétváltozós függvények (a pontonként a deriváltak, mint függvényértékek értelmezésével) és érdekl?dhetünk ezek parciális differenciálhatóságuk iránt. Például:

$$f(x,y) = x^2y^4 + x^5 - y^3$$

$$\partial_x f(x,y) = xy^4 + 5x^4$$
$$\partial_y f(x,y) = x^2 4y^3 - 3y^2$$

$$\partial_x(\partial_x f)(x,y) = y^4 + 20x^3$$
$$\partial_y(\partial_y f)(x,y) = 12x^2y^2 - 6y^2$$
$$\partial_y(\partial_x f)(x,y) = x4y^3$$

$$\partial_x(\partial_y f)(x,y) = 4xy^3$$

És valóban:

Tétel. (Young-tétel) Ha a másodrend? parciláis deriváltak léteznek az *u* egy környezetében és folytonosak az *u* pontban, akkor az *u*-beli vegyes másodrend? parciláis deriváltak egyenl?ek:

$$\partial_x(\partial_y f)(u) = \partial_y(\partial_x f)(u)$$

Azaz az alábbi, úgy nevezett Hesse-mátrix szimmetrikus:

$$H^f(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Feladat. Az a kitétel, hogy az *u*-ban a másodrenr? parciláis deriváltak folytonosak, nem hagyható el, ugyanis. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Ekkor a 0-ban nem egyenl? a két vegyes parciális derivált.

Tekintsük a parciális deriváltakat:

$$\partial_x(\partial_y f)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{(\partial_y f)(x,0) - (\partial_y f)(0,0)}{x}$$
$$\partial_y(\partial_x f)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{(\partial_x f)(0,y) - (\partial_x f)(0,0)}{y}$$
$$\partial_x(\partial_x f)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{(\partial_x f)(x,0) - (\partial_x f)(0,0)}{x}$$
$$\partial_y(\partial_y f)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{(\partial_y f)(0,y) - (\partial_y f)(0,0)}{y}$$

Ehhez tehát elegend? kiszámítani a következ? föggvényeket: y $\longmapsto$ $(\partial_x f)(0,y)$, x $\longmapsto$ $(\partial_y f)(x,0)$. Ehhez a parciális deriváltak:

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{ha } y = 0 \\ -y, & \text{ha } y \neq 0 \end{cases}$$
$$\partial_y f(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ x, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$
$$\partial_y f(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,y+t) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\partial_x f(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

Megjegyezzük, hogy a g=(∂_xf,∂_yf) függvény (0,0)-beli parciális deriváltjai nem lehetnek folytonosak, mert ott a függvény nem totálisan diffható. Ugyanis a g Jacobi-mátrixa:

$$J^g(0,0) = H^f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ami a 90?-os forgatás. Ekkor a g-t a (t,0) vektorral közelítve a 0-ba:

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)-J^g(0,0)\cdot(t,0)}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{(0,-t)}{|t|} \neq (0,0)$$

márpedig ha g minden parciális deriváltja folytonos lenne a (0,0)-ban, akkor g totálisan is deriválható lenne.

Többváltozós függvény széls?értéke

Másodikderivált próba

Kétszer differenciálható függvényre vonatkozóan megfogalmazhatjuk a lokális maximum és minimum létezésének elégséges feltételét. Csak a kétváltozós függvényekkel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy grad *f*(u) = 0 és H^f(u) az *f* Hesse-mátrixa

1. ha det H^f(u) > 0 és $\partial_{11}f(u) < 0$, akkor *f*-nek *u*-ban **maximuma** van
2. ha det H^f(u) > 0 és $\partial_{11}f(u) > 0$, akkor *f*-nek *u*-ban **minimuma** van
3. ha det H^f(u) < 0, akkor *f*-nek biztosan nincs széls?értéke, ún. **nyeregpont**ja van
4. ha det H^f(u) = 0, akkor a próba nem járt sikerrel, azaz további vizsgálatokat igényel annak eldöntése, hogy *u* széls?érték hely-e.

Megjegyzések. Mivel kétváltozós esetben

$$\det \mathrm{H}^f(u) = \partial_{11}f(u)\cdot\partial_{22}f(u) - (\partial_{12}f(u))^2$$

ezért olyan eset nem létezik, hogy det H^f(u) > 0 és $\partial_{11}f(u) = 0$.

Világos, hogy a másodikderivált tipikusan azoknál a függvényeknél jár sikerrel, melyeket egy másodfokú függvény közelít a legjobban (aszimptotikusan másodfokúak). Ha a függvény ennél magasabb fokú, akkor a második deriváltak elt?nnek és a Hesse-mártix elfajul (vagy legalább is tipikusan elfajul).

Ha tehát

$\mathrm{H}^f(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, akkor $\det \mathrm{H}^f(u) = AC - B^2$,

és így a tipikus példák a következ?k.

Példák

1. Ha B kicsi, azaz az AC-hez képest kis abszolútréték? szám, akkor a széls?érték irányába mozdul el a feladat.

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

Ekkor grad *f* = (2x + y , 2y + x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz 4 - 1 = 3 > 0 és 2 > 0 miatt minimum.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot x*x+x*y+y*y

2. Ha |B| nagy (azaz AC-hez képest nagy), akkor a bizonyosan nemszéls?érték irányába.

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$$

Ekkor grad *f* = (2x + -3y , 2y + -3x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz 4 - 9 = -5 < 0 miatt nincs széls?érték: nyeregpont.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot x*x -3*x*y+y*y

3. Negatív A és C-re és kis B-re:

$$f(x,y) = -x^2 + xy - y^2$$

Ekkor grad *f* = (-2x + 3y , -2y + 3x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

azaz 4 - 1 = 3 > 0 és -2 < 0 miatt maximum.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot -x*x +x*y-y*y

4. Ha A és C el?jele ellenkez?, akkor rögtön következik, hogy nincs sz.é.

$$f(x,y) = x^2 + xy - y^2$$

Ekkor grad *f* = (2x + y , -2y + x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

azaz -4 - 1 = -5 < 0 azaz nyeregpont.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot x*x +x*y-y*y

5. Atipikus eset, ha AC = B^2. Ekkor nem jár sikerrel a próba:

$$f(x,y)=x^2+2xy+y^2$$

Ekkor grad *f* = (2x + 2y , 2y + 2x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

azaz 4 - 4 = 0, azaz határozatlan eset. De tudjuk, hogy

$$f(x,y)=(x+y)^2$$

ami pontosan akkor minimális, ha x = -y, azaz ezeken a helyeken van széls?érték.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot (x+y)*(x+y)

Kiegészítés

Skalárfüggvények szorzata

, μ: *H* ⟶ **R**, ahol *H* **R**ⁿ és az *u* *H*-ban mindketten differenciálhatók, akkor μ is és

$$[\mathrm{d}(\lambda\mu)(u)]_{1j}=\partial_j(\lambda\mu)=\mu\partial_j\lambda+\lambda\partial_j\mu=[\mu(u).\mathrm{grad}\,\lambda(u)+\lambda(u).\mathrm{grad}\,\mu(u)]_j$$

azaz

$$\mathrm{grad}(\lambda\mu)(u)=\mu(u).\mathrm{grad}\,\lambda(u)+\lambda(u).\mathrm{grad}\,\mu(u)$$

Példa

Számoljuk ki $\mathbf{r}^2$ deriváltját a szorzat szabálya szerint.

Egyrészt, ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathrm{grad}\,\mathbf{r}^2=\mathrm{grad}\,|\mathbf{r}|\cdot|\mathbf{r}|=2|\mathbf{r}|.\mathrm{grad}|\mathbf{r}|=2|\mathbf{r}|.\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}=2\mathbf{r}$$

Másrészt, ha $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{r}^2 = 0 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{r} + |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{r}|$$

minden **r**-re fennáll, így grad(**id**^{2})(**0**) = **0** alkalmas az (**r**)=|**r**|-rel, tehát **r**^{2} differenciálható 0-ban is.

a × ... operátor

Differenciálható-e és ha igen mi a differenciálja, divergenciája, rotációja a

$$\mathbf{v} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3; \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$$

leképezésnek, ahol **a** el?re megadott konstans vektor.

Megoldás

Az **a** × ..., azaz az

$$\mathbf{a} \times \mathrm{I}$$

(itt I az identitás leképezés) leképezés lineáris, minthogy a vektoriális szorzás mindkét változójában lineáris (**v** *Lin*(**R**^{3};**R**^{3})), így differenciálható és differenciálja saját maga:

$$\mathrm{d}(\mathbf{a} \times \mathrm{I})(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathrm{I}$$

azaz

$$(\mathrm{d}(\mathbf{a} \times \mathrm{I})(\mathbf{r}))\mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h}$$

minden **h** és **r** **R**^{3} vektorra.

Jacobi-mátrixa (a sztenderd bázisbeli mátrixa) tetsz?leges (x,y,z) pontban:

$$\mathrm{J}^{\mathbf{a}\times\mathbf{I}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel a f?átlóbeli elemek mind nullák, ezért ebb?l rögtön következik, hogy div(**a** × I)(**r**) = 0.

$$[\mathrm{rot}\,\mathbf{v}]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}a_l x_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_l\partial_j x_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_l\delta_{jm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klj}a_l =$$
$$= \delta_{kk}\delta_{il}a_l - \delta_{ki}\delta_{lk}a_l = 3a_i - a_i = 2a_i$$

azaz rot **v** (**r**) = 2**a**. Az el?bb felhasználtuk a kett?s vektoriális szorzatra vonatkozó kifejtési tétel indexes alakját, a

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{jm}\delta_{li} - \delta_{jl}\delta_{im}$$

ami azt mondja, hogy ha az ijk és klm-ben a nem azonos párok jó sorrendben következnek, akkor az epszolon 1-et, ha rossz sorrendben, akkor -1-et ad.

a · ... operátor

Differenciálható-e és ha igen mi a differenciálja

$$\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}; \quad \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$$

leképezésnek, ahol **a** el?re megadott konstans vektor.

Megoldás

Skalártér lévén gradiensét kell kiszámolnunk. Mivel ez is lineáris leképezés, ezért differenciálható és differenciálja saját maga, azaz a gradiens vektor pont **a**:

$$\mathrm{grad}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}$$

Ezt persze indexes deriválással is kiszámítható:

$$[\mathrm{grad}\,\Phi]_i = \partial_i a_k x_k = a_k \partial_i x_k = a_k \delta_{ik} = a_i$$

További példa skalárfüggvényre

Határozzuk meg a

$$\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}; \quad \Phi(\mathbf{r}) = |\mathbf{i} \times \mathbf{r}|$$

(ahol **i** az *x* irányú egységvektor, |.| a vektor hossza) függvény szintvonalait, differenciálhatóságát, gradiensét!

Megoldás

Érdemes koordinátás írásmódra áttérni, hiszen az **i** vektor úgy is a koordinátarendszerhez kapcsolódik. A vektoriális szorzás definíciója miatt

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| \cdot \sin(\mathbf{i}, \mathbf{r})_\angle = \sqrt{y^2 + z^2}$$

Tehát azok a pontok vannak azonos szintfelületen, melyeknek az [yz] síkra vett vetületük azonos hosszúságú (**i** × **r** hossza az **i**-re mer?leges komponense **r**-nek). Az

$$y^2 + z^2 = 0$$

egyenlettel megadott pontokban (másként: $y = 0$ & $z = 0$ & x tetsz?leges) a függvény nem differenciálható, ugyanis a =0 szintfelület elfajúlt módon csak egy egyenes, az *x* tengely, így a gradiens vektor iránya nem egyértelm?. Ezt azzal is igazolhatjuk, ha vesszük ezekben a pontokban például az *y* irányú parciális függvényt:

$$\Phi(x_0, 0 + t, 0) = \sqrt{t^2} = |t|$$

azaz az $(x_0,0,0)$ pontokhoz tartozó $(x_0, . ,0)$ parciális függvény nem differenciálható a 0-ban.

Máshol a gradiensvektor, a parciális deriváltakat kiszámítva

$$\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)=\left(0,\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$

vagy másként:

$$\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})=\mathbf{i}\times\frac{\mathbf{i}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{i}\times\mathbf{r}|}$$

Megjegyezzük, hogy ehhez még a függvénykompozíció deriválási szabályával is lejuthattunk volna:

$$\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})=\operatorname{grad}\sqrt{(\mathbf{i}\times\mathbf{r})^2}=\frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{i}\times\mathbf{r})^2}}\cdot 2(\mathbf{i}\times\mathbf{r})\times(-\mathbf{i})$$

Indexes deriválás

Most csak a sokféle szorzat deriváltjának értékét számítjuk ki. Minden esetben igazolható, hogy ha a formulákban szerepl? összes derivált létezik, akkor a formula érvényes (s?t, ha a függvények az adott pontban differenciálhatók, akkor a szorzat is differenciálható az adott pontban). Az mátrixelemeket indexesen számítjuk.

Feltéve például, hogy az *f* többváltozós skalárfüggvény parciálisan differenciálható, a gradiens elemeit így nyerjük:

$$[\operatorname{grad} f]_i=\partial_i f$$

1. Példa

Ha $f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2$, akkor

$$\mathbf{r}^2=\sum_{k=1}^{3}[\mathbf{r}]_k[\mathbf{r}]_k=\sum_{k=1}^{3}x_kx_k=[\text{Einstein konv.}]\ x_kx_k$$
$$[\operatorname{grad} f]_i=\partial_i x_kx_k\ =x_k\partial_i x_k+x_k\partial_i x_k$$

de a koordinátafüggvények deriváltjairól tudjuk, hogy azoknak az értékét a Kronecker-delta adja:

$$\partial_i x_k=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & \text{ha}\quad i=k\\ 0, & \text{ha}\quad i\neq k\end{cases}$$

azaz

$$[\operatorname{grad} f]_i=2x_k\delta_{ik}=2x_i=[2\mathbf{r}]_i$$

tehát parciálisan differenciálható minden pontban és a Jacobi-mártix elemei a fentiek.

2. Példa

Ha $f(\mathbf{r}) = \mathbf{ar}$, akkor

$$[\mathrm{grad}\, f]_i = \partial_i a_k x_k \; = a_k \partial_i x_k = a_k \delta_{ik} \; = a_i = [\mathbf{a}]_i$$

3. Példa

Ha $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|$, akkor

$$[\mathrm{grad}\, f]_i = \partial_i (x_k x_k)^{\alpha/2} \; = \partial_i (x_k)^\alpha = \frac{\alpha}{2}(x_k x_k)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2\delta_{ik} x_k$$

itt ne feledjük, hogy k-ra szummázunk és hogy az összetett tényez?ben a skaláris szorzat szerepel:

$$[\mathrm{grad}\, f]_i = \alpha (x_k x_k)^{\frac{\alpha}{2}-1} x_i \; = \left[\alpha |\mathbf{r}|^\alpha \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}^2}\right]_i = \left[\alpha |\mathbf{r}|^{\alpha-1} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right]_i$$

tehát parciálisan differenciálható minden pontban és a Jacobi-mártix elemei a fentiek.

Deriválttenzor és invariánsai

Ha **A** az $f{:}\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ leképezés differenciálja az *u* pontban, akkor **A**-t deriválttenzornak nevezzük. Minden tenzor egyértelm?en el?áll egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegeként:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a$$

Ebb?l a szimmetrikus rész f?átlbeli elemeinek összege minden bázisban ugyanaz a skaláris érték, melyet a tenzor nyomának, illetve a függvény divergenciájának nevezzük:

$$\mathrm{div}(f)(u) = \mathrm{trace}(\mathbf{A})$$ illetve $$\mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i = *\partial_i f_i *$$

Az utóbbi írásmód a koordinátás alakban az úgy nevezett Einstein-féle jelölési konvenció, amelynek elve, hogy a kétszer sterepl? indexekre automatikusan szumma értend?.

Példa

$$\mathrm{div}\, \mathbf{r} = \partial_k x_k = \delta_{kk} = \dim(\mathbf{R}^n) = n$$

$f{:}\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ esetben a tenzor antiszimmetrikus részéhez egyértelm?en létezik egy olyan **a** vektor, hogy minden **r**-re:

$$\mathbf{A}_a \mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$$

mely vektort az *f* rotációjának nevezzük:

$$\mathrm{rot} f(u)$$ és $$[\mathrm{rot} f(u)]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k = *\varepsilon_{ijk} \partial_j f_k *$$

ahol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad (ijk) \in \{(123), (231), (312)\} \\ -1, & \text{ha} \quad (ijk) \in \{(321), (213), (132)\} \\ 0, & \text{egyebkent} \end{cases}$$

a Levi-Civita-szimbólum.

Skalárfüggvénnyel való szorzás

: $H \longrightarrow$ **R**, f:$H \longrightarrow$ **R**^{m}, ahol H **R**^{n} és az u H-ban mindketten differenciálhatók, akkor .f is és

$$[\mathrm{d}(\lambda.f)(u)]_{ij} = \partial_j(\lambda.f) = \partial_j\lambda f_i = f_i\partial_j\lambda + \lambda\partial_j f_i$$

azaz

$$\mathrm{d}(\lambda.f)(u) = f(u)\otimes \mathrm{grad}\lambda(u) + \lambda(u).\mathrm{d}f(u)$$

ahol $\otimes$ a diadikus szorzat, melynek koordinátamátrixa egy oszlopvektor (balról) és egy sorvektor (jobbról) mátrixszorzatából adódik. Ez ritkán kell teljes egészében, a két invariáns (rot-nál csak 3×3-as esetben) a gyakoribb.

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}(\lambda.f)(u) = f(u)\cdot\mathrm{grad}\lambda(u) + \lambda(u)\cdot\mathrm{div}f(u) \\ &[\mathrm{rot}(\lambda.f)(u)]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\lambda f_k = \varepsilon_{ijk}(\partial_j\lambda)f_k + \lambda\varepsilon_{ijk}\partial_j f_k = \\ &= [\mathrm{grad}\lambda(u)\times f(u) + \lambda(u).\mathrm{rot}f(u)]_i \end{aligned}$$

Vektorfüggvények skaláris szorzata

f,g:$H \longrightarrow$ **R**^{m}, ahol H **R**^{n} és az u H-ban mindketten differenciálhatók, akkor $f\cdot g$ is és

$$[\mathrm{d}(f\cdot g)(u)]_{1j} = \partial_j(f\cdot g) = \partial_j f_k g_k = f_k\partial_j g_k + g_k\partial_j f_k$$

azaz

$$\mathrm{d}(f\cdot g)(u) = (f(u)\cdot)\circ\mathrm{d}g(u) + (g(u)\cdot)\circ\mathrm{d}f(u)$$

illetve a Jacobi-mátrixszal:

$$\mathbf{J}^{f\cdot g}(u) = [f(u)]^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{J}^g(u) + [g(u)]^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{J}^f(u)$$

ahol $[.]^{\mathrm{T}}$ az oszlopvektor transzponáltját, $(v\cdot)$ pedig a v vektorral történ? skaláris szorzás operátorát jelöli.

5. gyakorlat 7. gyakorlat