

Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Tartalomjegyzék

- 1 Lineáris leképezések
 - ♦ 1.1 Képtér, magtér
 - ♦ 1.2 F?tengelytétel
- 2 Generált altér
 - ♦ 2.1 Megoldás
- 3 Képtér
 - ♦ 3.1 Megoldás
- 4 Magtér
 - ♦ 4.1 Megoldás
- 5 Feladatok alterekre
 - ♦ 5.1 Közös rész
 - ♦ 5.2 Alterek által kifeszített altér
- 6 Síkbeli leképezések
- 7 Térbeli leképezés mátrixa, sajátérték probléma
 - ♦ 7.1 Megoldás
- 8 Paraméteres egyenletrendszer
 - ♦ 8.1 1.
 - ♦ 8.2 2.
- 9 Paraméteres determináns

Lineáris leképezések

Képtér, magtér

A magtere:

$$\text{Ker}(\mathcal{A}) =_{\text{def}} \{v \in \mathbf{R}^n \mid \mathcal{A}v = 0\}$$

Ez tényleg altér, mert ha $v, u \in \text{Ker}(A)$, akkor $A v = A u = 0$ és

$$\mathcal{A}(\lambda \cdot v + \mu \cdot u) = \lambda \cdot \mathcal{A}v + \mu \cdot \mathcal{A}u = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

A magtér az A injektivitásával van kapcsolatban. A injektív, ha

$$\mathcal{A}v = \mathcal{A}u \Rightarrow v = u$$

Azaz minden $v - u$ alakú vektorra:

$$\mathcal{A}(v - u) = 0 \Rightarrow v - u = 0$$

de minden vektor $v - u$ alakú, ezért ez pontosan azt jelenti, hogy $\text{Ker}(A) = \{0\}$ a triviális altér.

A képtere:

$$\text{Im}(\mathcal{A}) =_{\text{def}} \{\mathcal{A}v \in V_2 \mid v \in V_1\} = \{u \in V_2 \mid \exists v \in V_1 \quad \mathcal{A}v = u\}$$

Ez szintén altér, mert ha vesszük két képtérbeli elem lineáris kombinációját, akkor szintén valamilyen elem képe.

$$\lambda \cdot \mathcal{A}\mathbf{v} + \mu \cdot \mathcal{A}\mathbf{u} = \mathcal{A}(\lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{u})$$

Ez a szűríkativitással van kapcsolatban. A szűríkativ, ha

$$\forall \mathbf{u} \in V_2 \quad \exists \mathbf{v} \in V_1 \quad \mathcal{A}\mathbf{v} = \mathbf{u}$$

márpedig $\text{Im}(\mathcal{A})=V_2$ pontosan azt jelenti, hogy az érkezési halmaz minden vektora előáll képként.

A két altér dimenziója között szoros kapcsolat van:

Dimenziótétel. Ha $\mathcal{A} : V_1 \rightarrow V_2$ véges dimenziós terek között ható lineáris leképezés, akkor

$$\dim \text{Ker}(\mathcal{A}) + \dim \text{Im}(\mathcal{A}) = n$$

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy $\text{Ker}(\mathcal{A})$ egy bázisának száma + $\text{Im}(\mathcal{A})$ egy bázisának száma = V_1 egy bázisának száma. Legyen $\dim V_1 = n$ és $\dim \text{Ker}(\mathcal{A}) = k$. Rögzítsük $\text{Ker}(\mathcal{A})$ egy

$$B = \{b_1, \dots, b_k\}$$

bázisát. Világos, hogy $\dim \langle B \rangle = k$, ezért a képtér nemnulla pontjaiba csak úgy juthatunk, ha $\langle B \rangle$ -n kívüli elemet választunk -- válasszunk annyit, mely az egész V_1 -et generálja, egészítsük ki B -t a V_1 egy bázisává a C halmaz hozzávételével:

$$B \cup C = \{b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_l\}$$

Ezek speciális tulajdonsága, hogy

$$\langle B \rangle \oplus \langle C \rangle = V_1$$

azaz közösen kifeszítik a V_1 -et és a kifeszített alterek közös része a $\{0\}$. Ugyanis, ha $\mathbf{v} \in \langle B \rangle \cap \langle C \rangle$, akkor

$$\mathbf{v} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k$$

és

$$\mathbf{v} = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_l c_l$$

akkor ezeket kivonva:

$$\mathbf{0} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k - \mu_1 c_1 - \mu_2 c_2 - \dots - \mu_l c_l$$

Amiből a BUC függetlensége miatt következik:

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_l$$

Ekkor a $D = \{ \mathcal{A}c_1, \mathcal{A}c_2, \dots, \mathcal{A}c_l \}$ vektorrendszer bázisa lesz $\text{Im}(\mathcal{A})$ -nak. Ugyanis

1. D kifeszíti $\text{Im}(A)$ -t. Egy

$$u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k + \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_l c_l$$

elemmel:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= \mathcal{A}(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k + \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_l c_l) = \\ &= \mathcal{A}(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k) + \mathcal{A}(\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_l c_l) = \\ &= 0 + \mu_1 \mathcal{A}c_1 + \mu_2 \mathcal{A}c_2 + \dots + \mu_l \mathcal{A}c_l \end{aligned}$$

2. D lineárisan független. Ha ugyanis

$$\nu_1 \mathcal{A}c_1 + \nu_2 \mathcal{A}c_2 + \dots + \nu_l \mathcal{A}c_l = 0$$

akkor

$$\mathcal{A}(\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \dots + \nu_l c_l) = 0$$

azaz

$$\begin{aligned} \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \dots + \nu_l c_l &\in \text{Ker}(\mathcal{A}) \cap \langle C \rangle = \{0\} \\ 0 &= \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_l \end{aligned}$$

F?tengelytétel

Az $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ leképezést szimmetrikusnak nevezünk, ha a szenderd bázisban szimmetrikus a mátrixa. Ekkor minden ortonormált bázisban is szimmetrikus lesz a mártixa. Ezek között a bázisok között az átváltó mátrix ortogonális, azaz

$$O \cdot O^T = I$$

Értelmezhet? leképezés transzponáltja is, mert ortnormált bázisok közötti átváltás invariáns a transzponálásra. Általában az átváltott mátrix:

$$TAT^{-1}$$

alakú. Ortogonális transzformáció esetén pedig

$$(OAO^T)^T = (O^T)^T(OA)^T = OA^TO^T$$

Ekkor a szimmetria pont azt jelenti, hogy $A=A^T$.

F?tengelytétel. Szimmetrikus leképezés sajátvektoraiból ortonormált bázis alkotható csupa valós sajátértékekkel.

Generált altér

20. fejezet 17, 21, 30, 39, 45, 44, 60, 19. fejezet 38, 42 (csak a 3x3-as eset), 73.

Hány dimenziós alteret generál az alábbi vektorrendszer? Adja meg a kifeszített altér egy bázisát!

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás

A vektorok az $\mathbf{R}^3$ térbeliek, így az altér legfeljebb 3 dimenziós lehet. Ha $\mathbf{A}$ -val jelöljük a fenti oszlopvektorok alkotta mátrixot, akkor a feladat megoldásában (azaz egymással összefüggő vektorok keresésében) segít az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldása. Ebből nem csak azt tudjuk majd meg, hogy lineárisan függetlenek-e (hiszen pontosan tudjuk, hogy nem azok, mert $\dim\langle \mathbf{A} \rangle < 4$), hanem hogy hány független választható ki, vagyis az $\mathbf{A}$ ragját, $r(\mathbf{A})$ -t. A-t Gauss-algoritmussal átalakítva:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} &\sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -6 & 10 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \sim_{\text{GAlg}} \\ &\sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A megoldás: az utolsó két változó paraméternek vehetjük, mondjuk t és s , így kiírva az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2t + 3s &= 0 \\ 10y - 6t + 10s &= 0, \text{ azaz } 5y - 3t + 5s = 0 \end{aligned}$$

innen

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{5}t - s \\ x &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}t + s + 2t - 3s\right) = \frac{7}{10}t - s \\ z &= t \\ v &= s \end{aligned}$$

a megoldás. Tehát minden t, s -re fennáll:

$$\left(\frac{7}{10}t - s\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{5}t - s\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezekből világosan látható, hogy az első két vektor *bázisnak* választható, mert a 3. és 4. kifejezhető, rendre $t=1, s=0$ választással, majd $t=0, s=1$ választással.

Tehát:

$$\dim \langle A \rangle = 2 \text{ és az altér egy bázisa:}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Képtér

Mi az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix képterének dimenziója? Adja meg a képteret egyenlettel (hipersík egyenletével)! Adja meg a képteret egy alkalmas mátrix magtereként!

Megoldás

Az A -val való szorzás leképezése $\mathbf{R}^3$ -ból képez $\mathbf{R}^4$ -be. A képtér elvileg lehetne 4 dimenziós, ám a dimenziótétel szerint $\dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A = \dim \mathbf{R}^3$, így $\dim \text{Im } A$ legfeljebb 3. Ez már csak azért is igaz, mert a mátrix oszlopangla egyenlő a sorrangjával, ami legfeljebb 3.

Világos, hogy a mátrix oszlopai elemei a képtérnek, ugyanis vannak olyan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

oszlopvektorok, melyek szorzata a mátrixal pontosan az oszlopvektorokat adja az $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ sztenderd bázis $\mathbf{R}^3$ -ban, ezekkel rendre beszorozva a mátrixot, az oszlopokat kapjuk. A kérdés, hogy generálják-e ezek a képteret, és hogy függetlenek-e. A generátorrendszeriségre nyilván igen a válasz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gauss-eliminációval kiderül, hogy ezek a vektorok függetlenek is, így bázist alkotnak a képtérben.

A képtér hipersíkja $\mathbf{R}^4$ -nek, ennek egyenletét a képtér definíciójának segítségével, majd Gauss-módszerrel adjuk meg.

A kibővített együttthatómátrix:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}|\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & y_1 \\ 1 & 3 & 1 & y_2 \\ 1 & 2 & 1 & y_3 \\ 0 & -1 & -1 & y_4 \end{bmatrix} \sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & -1 & y_2 - y_1 \\ 0 & -2 & -1 & y_3 - y_1 \\ 0 & -1 & -1 & y_4 \end{bmatrix} \sim_{\text{GAlg}} \\
 &\sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & -1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 - y_1 - (y_2 - y_1) \\ 0 & 0 & 0 & y_4 - y_2 + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & -1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 - y_2 + y_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ez pontosan akkor megoldható, ha teljesül az

$$y_4 - y_2 + y_1 = 0, \text{ azaz } y_1 - y_2 + y_4 = 0$$

egyenlőség (homogén lineáris egyenletrendszer) az $\mathbf{y}$ vektorra.

Az ezt kielégítő vektorok pontosan az $(1, -1, 0, 1)$ mátrix magterét alkotják.

A képtérnek egy újabb bázisát is megadhatjuk: $y=t, z=r, v=s, x = t - s$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} t-s \\ t \\ r \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ tehát } \dim = 3 \text{ és a bázis:} \\
 B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Magtér

Mi az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

magterének dimenziója és adja meg egy bázisát!

Megoldás

Az $\mathbf{A}$ mátrix magtere praktikusán az $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alkotta lineáris altér, egyenletrendszeres formában:

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{(x, y, z, v) \in \mathbf{R}^4 \mid x+2y+3z+4v = 0 \quad \wedge \quad 2x+3y+4z+5v = 0\}$$

Előzetesen, próbáljuk meg a szituációt geometriailag elképzelni! A két egyenlet egy-egy hipersík az $\mathbf{R}^4$ térben, azaz két 3 dimenziós altér. Ezek metszete a feladat, azaz egy kétdimenziós altér, azaz egy geometriai

sík. Azt várjuk tehát, hogy a feladat megoldása 2 dimenziós eltér lesz. Persze, ettől még lehet hogy a feladat nem a tipikus helyzetet adja, így "<http://wiki.math.bme.hu/vakon>" "<http://wiki.math.bme.hu> csak azt mondhatjuk, hogy a keresett dimenziószám legfeljebb 4.

Gauss-eliminációhoz folyamodunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Szintén két változó paraméternek vehet? ($v = s, z = t$), így a megoldás visszafejtve:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3t + 4s &= 0 \\ -y - 2t - 3s &= 0 \end{aligned}$$

innen

$$\begin{aligned} y &= -2t - 3s \\ x &= 4t + 6s - 3t - 4s = t + 2s \end{aligned}$$

a megoldásvektor az alábbi, mely előáll a következő két vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t + 2s \\ -2t - 3s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Azaz a magtér a fenti két kihozott vektor által generált altér. Ezek persze nyilvánvalóan nem összefüggők az alsó két sor sztenderd bázisra utaló alakja miatt (az 1-es sehogy se jöhet ki a 0-ból).

Tehát

$$\dim \text{Ker } \mathbf{A} = 2 \text{ és a magtér egy bázisa:}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Feladatok alterekre

Közös rész

Igazoljuk, hogy ha W_1 és W_2 altér V -ben, akkor

$$W_1 \cap W_2$$

altér V -ben és

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \min\{\dim W_1, \dim W_2\}$$

Igazoljuk, hogy ha $\dim V = 40$, $\dim W_1 = 23$ és $\dim W_2 = 18$, akkor $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$

Altérak által kifeszített altér

Igazoljuk, hogy ha W_1 és W_2 altér V -ben, akkor

$$\dim\langle W_1, W_2 \rangle \leq \dim W_1 + \dim W_2$$

Igazoljuk, hogy ha $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, akkor

$$\dim\langle W_1, W_2 \rangle < \dim W_1 + \dim W_2$$

ugyanis mindig

$$\dim\langle W_1, W_2 \rangle = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Síkbeli leképezések

Írjuk fel a $+45^\circ$ -os forgatás F és az y -tengelyre tükrözés T operátorának mátrixait, determinánsait, a kompozícióik mátrixait és determinánsait, és az inverzeiket és ezek determinánsait!

Térbeli leképezés mátrixa, sajátérték probléma

Tekintsük az $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ síkot. Adjuk meg az S síkra történő tükrözés mátrixát, a sajátvektorait és a sajátaltérüket, illetve a sajátkoordinátarendszert!

Megoldás

A síkra tükrözés hozzárendelési utasítása:

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} - \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}$$

ahol $\mathbf{n}$ a sík normálvektora, itt $(1, -1, 1)$. A bázisok képei:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A mátrix:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ez -1 determinánsú szimmetrikus mátrix, ortonormált vektorokból álló sajátrendszerrel.

Tudjuk, hogy az s nemnulla vektor pontosan akkor sajátvektor, ha létezik hozzá λ skalár (sajátérték), hogy

$$As = \lambda \cdot s$$

A sajátvektorokat a számítás helyett a szemléletünkre bízva adjuk meg. Világos, hogy a sajátvektorok a sík vektorai $\lambda = 1$ sajátértékkel és a síkra merőleges origón áthaladó egyenes vektorai $\lambda = -1$ sajátértékkel.

Ortogonalis sajátvektorokból álló bázist megadhatunk, ha vesszük a normálvektort: $(1, -1, 1)$, a síknak egy tetszőleges vektorát: $(1/2, 1, 1/2)$, és vektoriálisan összeszorozzuk őket: $(-3/2, 0, +3/2)$. Ekkor ezek bázist alkotnak és ebben a bázisban a leképezés mátrixa a $(-1, 1, 1)$ elemeket a főátlóban tartalmazó diagonális mátrix (az elemek pont a sajátértékek).

Paraméteres egyenletrendszer

1.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -2 \\ -y + z &= 1 \\ x + y + az &= b \end{aligned}$$

$$[A|y] \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & b+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & b \end{bmatrix}$$

megoldható pontosan akkor, ha $a-1=0$ esetén, $b=0$ és $a-1 \neq 0$ esetén b bármilyen. Az első esetben végtelen sok megoldás, a másodikban 1, tehát:

0 megoldás, ha $(a,b) \in \{1\} \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$, mert ekkor $0x+0y+0z=b \neq 0$ ellentmondó egyenlet

1 megoldás, ha $(a,b) \in \mathbf{R} \setminus \{1\} \times \mathbf{R}$, mert ekkor $\det A \neq 0$

megoldás, ha $(a,b)=(1,0)$, mert ekkor $\det A = 0$ és nem ellentmondó az alsó egyenlet:

$0x+0y+0z=0$ Mozo 2008. március 10., 10:22 (CET)

2.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -3x + 2y - z &= b \\ -2x + y + az &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & b \\ -2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 0 & -1 & a+2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 0 & 0 & a & -1-b \end{bmatrix}$$

Diszkusszió:

1) Van megoldás pontosan akkor, ha $a \neq 0$ és b bármilyen vagy $a = 0$ és $b = -1$ (ekkor az ehómátrix és a kibővített mátrix rangja egyenlő? (3 ill. 2). 2) Ha van megoldás, akkor ez előbb említett első esetben 1 db megoldás van, az utóbb említett esetben végtelen sok. Mozo 2008. március 12., 14:57 (CET)

Paraméteres determináns

Milyen c -re nulla az alábbi determináns értéke?

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & c & c+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & c^2 \end{vmatrix}$$

a 2. oszlop csupa 1, és a többiben is van sok egyes, tehát érdemes levonni a 2. oszlopot a többiből:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 3 & c^2-1 \end{vmatrix}$$

a 2. sorban egy db 1-es lett, fejtsük ki eszerint:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & c-1 & c \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & c^2-1 \end{vmatrix}$$

ha levonjuk az 1. oszlopot a 3-ból, akkor eltűnik a -2:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & c-1 & c-1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & c^2+2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} c-1 & c-1 \\ 3 & c^2+2 \end{vmatrix} = 2(c-1)(c^2+2) - 6(c-1) = 2(c-1)(c^2+2-3) = 2(c-1)(c^2-1) = 2(c-1)^2(c+1)$$

3. gyakorlat 4. gyakorlat