<Matematika A3a 2008

Tartalomjegyzék

Differenciálegyenletek

Legyen $F:I\times J\longrightarrow \mathbf{R}$ korlátos és zárt téglalapon értelmezett folytonos kétváltozós függvény. Az

$y\,' = F(x,y)$

els?rend? közönséges differenciálegyenlet megoldásainak nevezzük az olyan $y:K\longrightarrow J$ függvényeket, melyekre

1) K I intervallum,
2) y differenciálható függvény és
3) minden x K számra $y'(x)=F(x,y(x))$.

Ha (x_0,y_0) $I\times J$, akkor az egyenlet $y_0 = y(x_0)$ *kezdeti feltételt kielégít? partikuláris megoldásának* nevezzük az olyan megoldásokat, melyekre $y_0 = y(x_0)$. Adott kezdeti feltételt kielégít? megoldás keresését *kezdeti érték problémának* vagy *Cauchy-problémának* nevezzük. Az egyenlet *összes megoldása* az egyenlet összes megoldása.

Integrálgörbe, görbesereg, általános megoldás

Az els?rend? közönséges differenciálegyenlet megoldásának keresése *geometriailag* a következ?ket jelenti. Adott koordinátasíkon egy téglalap, melynek minden pontjához az F függvény egy számot (tkp. meredekséget) rendel. Ez az *iránymez?*. Keresünk olyan függvénygörbéket, melyek deriváltja (érint?jének meredeksége) az adott pont abszciszájában éppen az F függvény azon pontbeli értéke. Az ilyen függvénygörbékhez tartozó egyváltozós függvények az egyenlet megoldásai, magukat a görbéket pedig az egyenlet *integrálgörbéinek* hívjuk.

1. Számpélda.

(diff) $$y' = -\frac{x}{y}$$

Bármi is legyen a megoldás, az nem vehet fel 0 értéket, mert az ismeretlen függvény a nevez?ben szerepel. Látható, hogy az (x,y) vektor +90 fokos elforgatottja az $F(x,y)$ értéke. Ebbe az iránymez?be belesimul a kör:

(impl) $$x^2 + y^2 = r^2$$

Az ilyen egyenlet által leírt függvénygörbe valóban a (diff) megoldását ábrázolja (feltéve, hogy *y* differenciálható és nem veszi föl a nullát).

Most megmutatjuk, hogy az (impl) differenciálható implicit függvényei megoldásai (diff)-nek. A differenciálható implicit függvénye (impl)-nek olyan intervallumon értelmezett y=y(x) diff.-ható függvény, melyre minden x Dom(y)-ra:

$$x^2 + (y(x))^2 = r^2$$

valamely r-re. Ha tehát van (impl)-nek y(x) megoldása, akkor az implicit deriválás szabályai szerint:

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0$$

tehát y valóban (diff) megolása. A körívek tehát integrálgörbéi az egyenletnek. Az integrálgörbék ráadásul *paraméteres görbesereggé* állnak össze, melyekben a paraméter a kör sugara.

(diff) megoldásai azonban ugyanígy megoldásai (impl)-nak. Az a szerencsénk, hogy megsejtettük, hogy (impl) az egyenlet integrálja, ezért ezt már nem kell el?állítanunk. Legyen y olyan, hogy 2x+2y(x)y'(x) 0 és y_0=y(x_0). Az implicit deriválás miatt tudjuk, hogy

$$g : x \mapsto x^2 + (y(x))^2$$

deriváltja, azaz 2x+2y(x)y'(x), azonosan nulla. Az integrálszámítás alaptétele szerint tehát g (az I minden korlátos és zárt L intervallumán) konstans függvény:

$$x^2 + (y(x))^2 = C$$

r^2=C-t pedig kijelöli y_0=y(x_0).

[Az integálszámítás alaptétele abban a gyenge formában, ahogy mi most használtuk ez: ha a nyílt intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható g:I$\longrightarrow$ **R** függvény deriváltja azonosan nulla, akkor ez a függvény minden zárt és korlátos intervallumon konstans. Ez közvetlen következménye a Lagrange-féle középértéktételnek. Az er?sebbb alak szerint g-r?l elég feltenni, hogy Lipschitz-függvény és a deriáltja majdnem mindenhol nulla.]

Általánosított fogalmak. Azt mondjuk, hogy a differenciálegyenlet *általános megoldását* (a *H* *I*×*J* kezdeti feltétel halmazon) a (x,y,C)=0 egyenlet? egyparaméteres görbesereg szolgáltatja (vagy az egyenlet általános megoldását az el?bbi implicit egyenlet adja meg), ha minden (*H*-beli) (x_0,y_0) kezdeti feltételre van *egyetlen* olyan *C* valós paraméter, hogy rögzített C-re a (x,y,C)=0 egyenlet (x_0,y_0) ponthoz tartozó implicit megoldása a differenciálegyenlet kezdeti feltételt kielégít? megoldása.

Az egyenlet *explicit általános megoldása* (a *H* *I*×*J* halmazon) a :*K*×**R**$\longrightarrow$ *J* paraméteres függvény, ha minden (*H*-beli) kezdeti feltételhez egyértelm?en létezik olyan *C*, melyre y= (.,C) a szóban forgó kezdeti feltételt kielégít? megoldása az egyenletnek.

Tegyük föl, hogy a (x,y,C)=0 implicit egyenlettel megadott görbesereg elemei megoldásai egy differenciálegyenletnek. Ha minden változója szerint (tehát a paraméter szerint is) folytonosan parciálisan differenciálható, akkor annak az elégséges feltétele, hogy *C* egyértelm?en kifejezhet? legyen az, hogy C-szerinti deriváltja sehol se legyen nulla. Ezt a feltételt az implicitfüggvény tétele biztosítja.

Szeparábilis differenciálegyenlet

A legegyszer?bb differenciálegyenlet az *y'*=*f*(*x*), ami lényegében primitívfüggvénykeresés. Tudjuk, hogy (folytonos *f* esetén) mindig van ennek megoldása, éspedig az integrálfüggvény az, de ez nem feltétlenül kapható meg elemi függvények segítségével "http://wiki.math.bme.hukézzel fogható"http://wiki.math.bme.hu zárt alakban. Az el?z? számpélda arról árulkodott, hogy a diffegyenlet megoldásához kell egy egyenlet, melynek implicit megoldásai az differenciálegyenlet megoldásai lesznek. Ezt az implicit egyenletet konstruktív módon nem mindig lehet megtalálni. (Az explicitet meg pláne nem.)

Általánosabb esetben a közönséges els?rend? differenciálegyenletek megoldását két startégiával kereshetjük meg. Az *egzakt differenciálegyenlet* és a *szeparálás*. Most a szeparábilis egyenletek megoldását nézzük meg.

2. Feladat. Milyen függvények elégítik ki az alábbi differenciálegyenletet?

$$y' = \frac{\sin x}{y^6}$$

Megoldás. Nyilván a megoldás sehol sem vehet föl nulla értéket, mert akkor

$$\frac{\sin x}{y^6(x)}$$

ott nem lenne értelmezve.

A mechanikus megoldási eljárás annak az egyenletnek a legyártásához, melynek implicit megoldásai a szeparábilis egyenlet megoldásai lesznek a következ?. Ha van megoldás, akkor nyilván

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin x}{y^6}$$
$$y^6\mathrm{d}y = \sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int y^6\mathrm{d}y = \int \sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{y^7}{7} = -\cos(x) + C$$

ez az implicit általános megoldás és

$$y(x) = \sqrt[7]{-7\cos(x) + C}$$

az explicit általános megoldás. Olyan $K \longrightarrow$ **R** differenciálható függvények a megoldások, melyek hozzárendelési utasítása a fenti és nem veszik fel a nulla értéket. A megoldás mechanikus megkeresése után tehát olyan *K* **R** intervallumokra kell szorítkoznunk, ahol az *y(x)* nem vesz fel nulla értéket és a 7. gyök alatt nincs nulla (ahol az nem lenne differenciálható).

Egzisztencia és unicitás

Tétel. Legyen $f: I \longrightarrow$ **R**, g: $J \longrightarrow$ **R** intervallumon értelmezett folytonos függvények, ahol *g* sehol sem nulla. Az

$$y' = f(x)g(y)$$

szeparábilis diffegyenlet összes megoldása

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

alakú, ahol G az 1/g egy integrálfüggvénye, F az f-é.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van megoldás és ennek értelmezési tartománya a *K* *I* halmaz. Ekkor

$$y'(x) = f(x)g(y(x)),$$

A helyettesítéses integrálás szabálya szerint

$$\int \frac{y'}{g(y)}\, dy = G(y) = \int f(x)\, dx = F(x) + C$$

azaz

$$G \circ y = F + C$$

ahol G az 1/g egy integrálfüggvénye, F az f-é. Mivel G deriváltja g és a derivált nem ugrik (Darboux-tétel), ezért G szigorúan monoton, tehát G injektív, azaz az y kifejezhet?:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Az implicitfüggvény-tételb?l az is kiderül, hogy az (x,y)=G(y)-F(x)-C függvény folytonosan differenciálható és y szerinti deriváltja nem nulla, így lokálisan létezik implicit függvénye bármely pontban és deriváltja:

$$y'(x) = -\frac{(\partial_x \Phi)(x, y(x))}{(\partial_y \Phi)(x, y(x))} = -\frac{-f(x)}{1/g(y(x))},$$

3. Feladat. Oldjuk meg az $y' = ay$ egyenletet.

*Mo.*y 0 megoldás. Ha semmilyen pontban y nem nulla, akkor ln |y|= ax +C, |y|=Ke^{ax}, ennek differenciálható implicit függvényei (a Bolzano-tétel miatt): y=ce^{ax} ahol c nemnulla valós szám; ha c=0 is megengedett, akkor az y=0 is beilleszthet? a paraméteres megoldások közé. Valójában a feladat becsapás, mert ez nem szeparábilis egyenlet. Szeparálással megkaphatók megoldások, és mivel lineáris, ezért a megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak, azaz egy nemnulla megoldásból az összes megoldás egy konstans szorzóval megkapható, tehát y=ce^{ax} az összes megoldás. Továbbá az alábbi C--L-feltétel miatt a 0 érték? megoldás is egyértelm?, azaz ha valahol 0 a megoldás, akkor az csak az azonosan nulla lehet.

4. Feladat. $(1 + x^3)dx - x^2 y dy = 0$ Minden olyan intervallumon, melynek a 0 nem eleme szeparálva:

$$y\, dy = \frac{1 + x^3}{x^2}\, dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$$

Peano- és Cauchy--Lipschitz-feltétel

Tétel -- Peano-féle egzisztenciatétel -- Ha az f(x,y)=y' egyenlet olyan, hogy az f egy (x_0,y_0) pont környezetében folytonos, akkor van az $y(x_0)=y_0$ kezdeti feltételnek eleget tév? partikuláris megoldása.

Megmutatjuk, hogy a folytonossági kitétel szükséges. Tekintsük a $\mathrm{sgn}(\sqrt{x^2+y^2}) = y'$ egyenletet. Nyilván ennek nincs megoldása a (0,0)-ban, mert ha lenne, akkor a deriváltja ugranak, márpedig intervallumon deriválható differenciálható függvény deriváltjának nem lehet ugrása.

Tétel -- Egzisztencia-unicitás tétel, gyenge verzió, lokális alak -- Ha az U nyílt halmazon értelmezett f(x,y) folytonosan parciálisan differenciálható, akkor minden U-beli kezdeti feltételhez egyértelm?en létezik az y'=f(x,y)-nak a kezdeti feltételnek megfelel? megoldása.

Cauchy--Lipschitz-feltétel, er?s verzió, globális alak. A tétel akkor is igaz, ha f-re nem a folytonos deriválhatóságot, hanem csak a folytonosságot és az egységes Lipschitz-feltételt tesszük fel, azaz, hogy létezik olyan L szám, hogy minden (x,y_1),(x,y_2) U-ra

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Ilyenkor globális állítás is megfogalmazható: minden U-beli kompakt K halmazhoz és az ennek belsejében lév? kezdeti ponthoz létezik egyetlen megoldása az y'=f(x,y) differenciálegyenletnek, mely áthalad a ponton és a megoldás grafikonja a K halmazból kilép.

Feladatok

a) Mi az általános megoldása?

$$y' = \frac{x\sin(1+x^2)}{y^4}$$

b) Hány megoldása van az alábbi KÉF-nak? Ha több van, mondjunk legalább kett?t!

$y' = \sqrt[3]{y}$, $y(0) = 0$

Mo. a) Minden olyan kezdeti feltételhez, melyben y nem nulla van egyértelm? megoldás, éspedig

$$y^4 dy = x\sin(1+x^2)dx$$
$$\frac{y^5}{5} = -\frac{1}{2}\cos(1+x^2) + C$$
$$y(x) = \sqrt[5]{-\frac{5}{2}\cos(1+x^2) + 5C}$$

b)

$y = 0$ és $y = (2/3)x^{3/2}$

2. gyakorlat