

## Tartalomjegyzék

- 1 Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet
  - ◆ 1.1 Rezonanciák
- 2 Állandó együtthatós elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer
  - ◆ 2.1 Példák

## Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet

Csak a másodrendű esetet tárgyaljuk:

$$ay'' + by' + cy = h(x)$$

ha  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

Ilyenkor a homogén egyenlet megoldását az  $a^2 + b^2 + c = 0$  karakterisztikus egyenlet megoldásából származó gyökökből száraztatjuk (bizonyítása a bizonyítások között).

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R} \quad y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbf{R} \quad y_H(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbf{C} \quad y_H(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Az inhomogén egyenlet megoldását a következő alakban keressük. Ha az inhomogén tag az alábbi alakban írható

$$h(x) = e^{\alpha x} (p(x) \cos(bx) + q(x) \sin(bx))$$

ahol  $p(x)$  és  $q(x)$  polinomok és a  $a+ib \in \mathbf{C}$  szám  $m$  szeres gyöke az  $a^2 + b^2 + c$  karakterisztikus polinomnak, akkor az  $y_p(x)$  partikuláris megoldásra a feltevés:

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x} (P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx))$$

ahol  $P(x)$  és  $Q(x)$  olyan polinomok, hogy  $\deg P(x) = \deg Q(x) = \max\{\deg p(x), \deg q(x)\}$ .

Ha **nincs** külső rezonancia, akkor az alábbi "http://wiki.math.bme.hu/symbolikus" http://wiki.math.bme.hu táblázat sug, hogy az inhomogén tag (gerjesztés) ismeretében milyen alakban keressük a partikuláris megoldást. (Ha van külső rezonancia, akkor annyiszor szorozzuk meg  $x$ -szel ezt az értéket, hogy az már éppen lineárisan független legyen a homogén alapmegoldásoktól.)

$h(x)$	$y_P(x)$
$7x - 8$	$Ax + B$
$-x^2 + \frac{1}{8}x - \sqrt{2}$	$Ax^2 + Bx + C$
$\frac{1}{7}e^{2x}$	$Ae^{2x}$
$\sin(3x), \cos(3x)$	$A \sin(3x) + B \cos(3x)$

**Rezonanciák**

$$1. y'' + 9y = \sin(3x)$$

$$Mo. \lambda^2 + 9 = 0, \text{ azaz } \lambda_{1,2} = \pm 3i. \text{ Innen}$$

$$y_H(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

Mivel

$$h(x) = \sin(3x)$$

ezért  $a + bi = 3i$  egyszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek,  $m=1$  és az általános  $P(x)$ ,  $Q(x)$  polinomok konstansok:  $A, B$ , így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y_p(x) = Ax \cos(3x) + Bx \sin(3x)$$

alakban keresend?.

$$2. y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

$$Mo. \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \text{ azaz } \lambda_{1,2} = 2. \text{ Innen}$$

$$y_H(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Mivel

$$h(x) = e^{2x}$$

ezért  $a = 2$  kétszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, és ezért  $m=2$  az általános  $P(x)$ ,  $Q(x)$  polinomok közül csak  $P(x)$  marad, mert  $b=0$  lévén  $Q(x)$  kiesik, de  $P(x)=A$  állandó, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y_p(x) = Ax^2 e^{2x}$$

alakban keresend?.

$$3. y'' - 3y' + 2y = x e^x$$

$$Mo. \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \text{ azaz } \lambda_{1,2} = 1; \quad 2. \text{ Innen}$$

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Mivel

$$h(x) = x e^x$$

ezért  $a = 1$  egyszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, és ezért  $m=1$  az általános  $P(x)$ ,  $Q(x)$  polinomok közül csak  $P(x)$  marad, mert  $b=0$  lévén  $Q(x)$  kiesik ( $\sin(0)=0$ ), de  $P(x)=Ax+B$  elsőfokú, mert

$p(x)=x$  (hiszen  $\cos(0)=1$  és ez megmaradt), így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása az

$$y_p(x) = x(Ax + B)e^x$$

alakban keresend?.

## Állandó együtthatós elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer

Az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

egyenletrendszerben  $\mathbf{A}$  konstans valós mátrix,  $\mathbf{b}(t)$  vektorfüggvény. Csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $\mathbf{A}$ -nak vannak független sajátvektorai.

A homogén egyenlet megoldását az úgy nevezett mátrix alapmegoldásból állítjuk elő. Keresünk tehát olyan  $\Psi(t)$  mátrixfüggvényt, melyre:

$$\dot{\Psi}(t) = \mathbf{A} \cdot \Psi(t)$$

Belátjuk, hogy erre az  $\mathbf{A}$  mátrix  $\mathbf{s}_{1,2}$  sajátvektoraiból összerakott

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{s}_1 & e^{\lambda_2 t} \cdot \mathbf{s}_2 \\ | & | \\ | & | \end{bmatrix}$$

mátrixfüggvény, alkalmas, ahol persze  $\mathbf{A}\mathbf{s}_i = \lambda_i \mathbf{s}_i$  ( $i=1;2$ ). Ugyanis

$$\dot{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{s}_1 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \cdot \mathbf{s}_2 \\ | & | \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{A}\mathbf{s}_1 & e^{\lambda_2 t} \cdot \mathbf{A}\mathbf{s}_2 \\ | & | \\ | & | \end{bmatrix} = \mathbf{A}\Psi(t)$$

Ilyenkor pedig a megoldás tetszőleges  $\mathbf{c}$  konstans általános vektorral:

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t) \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{s}_1 & e^{\lambda_2 t} \cdot \mathbf{s}_2 \\ | & | \\ | & | \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} s_{11} + c_2 e^{\lambda_2 t} s_{21} \\ c_1 e^{\lambda_1 t} s_{12} + c_2 e^{\lambda_2 t} s_{22} \end{bmatrix}$$

Az inhomogén egy partikuláris megoldását a következőképpen keressük meg. Feltesszük az állandó variálása módszerével, hogy

$$\mathbf{x}_p(t) = \Psi(t) \cdot \mathbf{c}(t)$$

Ezt behelyettesítve az inhomogén egyenletbe kapjuk, hogy

$$(\Psi(t) \cdot \mathbf{c}(t))' = \mathbf{A}\Psi(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t)$$

$$\dot{\Psi}(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \Psi(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}\Psi(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t)$$

De mivel tudjuk, hogy  $\dot{\Psi}(t) = \mathbf{A} \cdot \Psi(t)$ , ezért

$$\mathbf{A} \cdot \Psi(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \Psi(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}\Psi(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Ezért kiejtve, amit ki lehet, csak az

$$\Psi(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{b}(t)$$

paraméteres egyenletrendszert kell megoldani  $\dot{\mathbf{c}}(t)$ -re.

## Példák

4.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3x_2 \\ 3x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mo.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + e^t \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Homogén:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ karakterisztikus polinomjának megoldásai: } = -1; 5$$

Sajátvektorai rendre: (1,-1), (1,1) ezekb?l a megoldás. Innen

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & e^{5t} \end{pmatrix}$$

és

$$x_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} = \Psi(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Inhomogén:

$$\Psi(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss--Jordan-nal:

Példák

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} & e^t \\ -e^{-t} & e^{5t} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} & e^t \\ 0 & 2e^{5t} & e^t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} & e^t \\ 0 & e^{5t} & \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & \frac{1}{2}e^t \\ 0 & e^{5t} & \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} \\ -\frac{1}{8}e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$x_P(t) = \Psi(t) \cdot c(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} \\ -\frac{1}{8}e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}e^t \\ -\frac{3}{8}e^t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8}e^t \\ -\frac{3}{8}e^t \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 & -2x_2 \\ 6x_1 & -2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. gyakorlat

5. gyakorlat