

## Tartalomjegyzék

- 1 Komplex számkör és reprezentációi
  - ◆ 1.1 Algebrai modell
  - ◆ 1.2 Halmazelméleti modell
  - ◆ 1.3 Geometriai modell
- 2 Komplex számkör unicitása
- 3  $\mathbb{C}$  topológiája
- 4  $\mathbb{C}$  kompaktifikálása
- 5 Komplex sorozatok
  - ◆ 5.1 Nullsorozatok
- 6 Komplex sorok
  - ◆ 6.1 Komponensek
  - ◆ 6.2 Cauchy-kritérium és abszolút konvergencia
  - ◆ 6.3 Kritériumok az abszolút konvergenciára

## Komplex számkör és reprezentációi

A komplex számok  $\mathbb{C}$  halmazát és műveleteit legalább három, lényegesen más szempögből lehet láttatni. A meghatározottság kedvéért összefoglaljuk a komplex számok legfontosabb algebrai tulajdonságait. Nem térünk ki minden egyes műveleti tulajdonságra, ezek megtalálhatók a komplex számok algebráját leíró tankönyvekben.

### Algebrai modell

A komplex számok olyan

$$a + bi$$

alakú formális kifejezések, ahol  $a$  és  $b$  valós számok,  $i$  pedig azzal a speciális tulajdonsággal rendelkezik, hogy

$$i^2 = -1$$

A komplex számok halmazát a  $\mathbb{C}$  szimbólummal jelöljük, tehát

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

itt  $a$ -t a  $z$  valós részének nevezzük és  $\operatorname{Re}(z)$ -vel jelöljük,  $b$ -t a  $z$  képzetes részének nevezzük és  $\operatorname{Im}(z)$ -vel jelöljük. Világos, hogy  $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ , azaz "<http://wiki.math.bme.hu> valós.

**Megjegyzés.** A kevésbé informatív "<http://wiki.math.bme.hu> formális kifejezés" "<http://wiki.math.bme.hu> helyett bevezethetjük a komplex számokat valódi algebrai objektumokként. A komplex számok halmazát egy a maradékos osztással rendelkező halmazból konstruáljuk: a valós együtthatós polinomok  $\mathbb{R}[X]$  halmazából. Közismert, hogy a valóseyütthatós, egyhatározatlanú polinomok, azaz a

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

alakú kifejezésekkel, ahol az  $a_i$ -k valós számok,  $n$  pedig nemnegatív egész, lehet maradékosan osztani (polinomosztás). Ekkor

$$\mathbf{C} =_{\text{def}} \mathbf{R}[X]/(x^2 + 1)$$

azaz a komplex számok halmaza a valós együtthatós polinomok  $x^2+1$  polinommal történő osztási maradékai. Világos, hogy minden ilyen maradék eláll

$$m(x) = a + bx$$

alakban, azaz legfeljebb elsőfokú polinom alakjában. Ebben a számkörben az *összeadás* a polinomösszeadás, a szorzás a polinomok szorzása (illetve ezen eredményének  $x^2+1$ -vel történő osztási maradéka). Amikor két elsőfokú polinom szorzata másodfokú, akkor sem lépünk ki a számkörből, hisz a

$$m(x)^2 + 1 = 0$$

polinomegyenlet megoldható, és pedig az  $m(x)=x$  polinom (az identitás) megoldás. Ekkor

$$m(x)^2 = -1$$

azaz ebben a számkörben létezik a  $-1$ -nek négyzetgyöke. Az  $m(x)=x$  polinom az, mely az  $i$  egység szerepét játssza és így is jelöljük ezt ezentúl.

Akárcsak a legfeljebb elsőfokú  $a + bx$  alakú polinomok esetén, a  $\mathbf{C}$ -t alkotó formális kifejezések között is értelmezhetjük az összeadást és a szorzást. Ezeket pontosan úgy definiáljuk, mint az  $a + bx$  alakú polinomok összegét és szorzatát, azzal a specialitással, hogy ahol a polinomok a szorzást követően másodfokúvá válnak, ott a komplex számok az  $i^2=-1$  egyenlőség miatt visszaérkeznek az  $a + bi$  alakú kifejezések körébe. Ezért lesz  $\mathbf{C}$  zárt arra a szorzásra, amit a polinomok mintájára definiálunk.

Már innen is látszik, hogy a komplex számok halmaza kétdimenziós valós test feletti vektortér. Kimondhatjuk tehát:

**Állítás.** A  $\mathbf{C}$  számkör a komplex számok

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i \text{ összeadásával és a}$$

$$(a+bi) = a + bi, \text{ a valós számmal való szorzással}$$

kétdimenziós valós vektorteret alkotnak és így lineárisan izomorfak a valós számpárok  $\mathbf{R}^2$  vektortérével.

## Halmazelméleti modell

Az algebrai modellben nem teljesen világos, hogy mi is az  $i$  elem. Az előző állítás azonban lehetőséget biztosít arra, hogy konkrétan megadjuk a komplex számok halmazát mindenféle olyan kifejezés használata nélkül, mint "[http://wiki.math.bme.hu/formális kifejezés](http://wiki.math.bme.hu/formális_kifejezés)" <http://wiki.math.bme.hu> stb. (Valójában persze az algebrai modell is jól értelmezett módon adja meg a komplex számok halmazát, ha az  $a + bi$  alakú formális kifejezéseken az  $\mathbf{R}[X]$  polinomgyűrűnek az  $(1+X^2)$  polinommal történő maradékos osztásának maradékait értjük).

A számpár reprezentációban:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$$

az összeadás az  $\mathbf{R}^2$ -beli vektorösszeadás, a szorzás, pedig a

$$(a + bi)(c + di) = (ac - db) + (ad + bc)i$$

m?velet, mely természetesen a "http://wiki.math.bme.hupolinomszorzásnak"http://wiki.math.bme.hu az el?z? állításbeli izomorfizmus által létesített képe.

Ez az interpretáció azért fontos, mert explicitté teszi, hogy a  $\mathbf{C}$  örökli az  $\mathbf{R}^2$  topológiáját.

## Geometriai modell

A szorzással együtt  $\mathbf{C}$  egységelemes, nullosztómentes algebrát alkot (tehát vektortér és van egy mindkét változójában lineáris bels? szorzás, melyben van egység és ?nullával nem lehet osztani?). Felmerülhet a gyanúnk, hogy talán reprezentálhatjuk a komplex számokat a  $2 \times 2$ -es valós mátrixon  $M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$  algebrájának egy részalgebrájaként. Ezt a komplex számok trigonometrikus alakja segítségével tehetjük meg. Ismert, hogy a komplex számmal való szorzás forgatva nyújtás, azaz lineáris leképezés az  $\mathbf{R}^2$  síkon:

$$\mathbf{C} \ni z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \equiv \begin{pmatrix} r \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$$

Világos, hogy ekkor az  $a + bi$  kanonikus alakot használva a komplex számoknak megfelelő mátrixok halmaza:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R}) : a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

Ez a mátrixhalmaz kétdimenziós altér az  $M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$  algebrában, melyet például a közvetve onnan is láthatjuk, hogy forgatva nyújtások is alteret alkotnak a lineáris leképezések terében.

## Komplex számkör unicitása

$\mathbf{C}$ , azaz a komplex számok teste kétdimenziós valós vektortér.  $\mathbf{C}$  elemei reprezentálhatók az  $\mathbf{R}^2$  síkon, a következ? megfeleltetésekkel:

$$\mathbf{C} \ni a + bi \equiv (a, b) \in \mathbf{R}^2$$

a vektortérm?veletek pedig:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \ni (a + bi) + (c + di) &\equiv (a, b) + (c, d) \in \mathbf{R}^2 \text{ vektorösszeadás } (a, b, c, d \in \mathbf{R}) \\ \mathbf{C} \ni \lambda \cdot (a + bi) &\equiv \lambda \cdot (a, b) \in \mathbf{R}^2 \text{ valós számmal való szorzás } (\lambda \in \mathbf{R}, a, b \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

A komplex számok körét a komplex szorzás tulajdonságai egyértelm?sítik.  $\mathbf{C}$  nem csak kétdimenziós valós vektortér, de a szorzással algebra is, s?t  $\mathbf{C}$  az *egyetlen kétdimenziós kommutatív, nullosztómentes valós algebra* -- izomorfizmus erejéig. Sok megjelenési formája lehet a komplex számoknak, de bármely két reprezentáció olyan, hogy található olyan kölcsönösen egyértelm?s leképezés köztük, mely lineáris és megtartja a szorzást is (azaz algebra izomorfizmus).

A nullosztómentesség és a kommutativitás jellemzően a mátrixalgebrákban nemtriviális tulajdonság. A komplex számok olyan lineáris leképezéseknek felelnek meg, melyek mátrixa

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

A komplex számok szorzása itt a mátrixszorzás.

## C topológiája

$\mathbf{R}^2$  gömbi környezetei lesznek  $\mathbf{C}$  gömbi környezetei. Általában, minden topologikus fogalom  $\mathbf{C}$ -ben  $\mathbf{R}^2$ -re vezetünk vissza. Tehát, adott  $r > 0$  valós számra és  $z_0 \in \mathbf{C}$  számra:

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

az  $r$  sugarú  $z_0$  középpontú nyílt gömbi környezet. Itt a  $| \cdot |$  abszolútérték helyett, mely a  $\| \cdot \|_2$  euklideszi norma, elvileg  $\mathbf{R}^2$  bármelyik normája alkalmas lenne, hisz véges dimenziós normált térben minden norma ekvivalens, azaz ugyanazokat a nyílt halmazokat határozzák meg. Szokásos módon értelmezték az előbb említett nyílt halmazok is. **C nyílt**, ha minden pontjával együtt, annak egy nyílt gömbi környezetét is tartalmazza:

$$\forall z \in \Omega \quad \exists r > 0 \quad B_r(z) \subseteq \Omega$$

Egy  $A \subseteq \mathbf{C}$  halmaz belsején értjük azon pontok halmazát, melyeknek egy egész gömbi környezete benne van  $A$ -ban

$$\text{int}(A) = \{z \in \mathbf{C} \mid \exists r > 0 \quad B_r(z) \subseteq A\}$$

Mivel  $\mathbf{R}^2$ -ben minden norma ekvivalens (ugyanazokat a nyílt halmazokat határozzák meg), ezért adott feladatokban tetszőleges, a feladathoz jól illeszkedő normát választhatunk. Topologikus szempontokból a komplex és  $\mathbf{R}^2$ - $\mathbf{R}^2$  függvények között a következő azonosítással élhetünk. Ha  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  függvény, akkor  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ , ill.

$$f \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

## C kompaktifikálása

*Kompakt* egy  $K$  halmaz, ha teljesül rá, hogy akárhogy is fedjük le nyílt halmazok rendszerével, azok közül már véges sok halmaz is lefedi a  $K$ -t. Szimbolikusan:

$K$  kompakt, ha minden  $(U_i)_{i \in I}$  halmazrendszerhez, melyre

1.  $U_i$  nyílt minden  $i \in I$ -re és
  2.  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$
- létezik  $J \subseteq I$  véges indexhalmaz, hogy  $K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$

$\mathbf{R}^N$ -ben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Tehát maga  $\mathbf{C}$  nem kompakt, hisz nem korlátos (bár zárt). Viszont  $\mathbf{C}$  egyetlen egy ponttal kibővítve már kompakttá tehető, ugyanis egy ideális pont hozzávételével  $\mathbf{C}$  kölcsönösen egyértelmű és folytonos kapcsolatba hozható a gömbfelülettel, mely  $\mathbf{R}^3$ -ban kompakt. Ezt a sztereografikus projekcióval oldjuk meg.

A Riemann-gömb konstrukciójához vegyük az  $\mathbf{R}^3$ -ban az origó középpontú egységgömböt és gondoljunk úgy az  $[xy]$  síkra, mint a  $\mathbf{C}$  komplex számsíkra. Az egységgömb pontjait a következő módon feleltetjük meg a komplex számoknak. Tekintsük a gömbön a  $(0,0,1)$  koordinátájú  $P$  pólust és egy  $a + bi$  komplex szám esetén az  $(a,b,0)$  pontot kössük össze  $P$ -vel egy  $e$  egyenes által. Ekkor az  $e$  egyetlen pontban metszi az egységgömböt, mely kijelöli az  $a + bi$ -nek megfelelő pontot. Ha az  $a + bi$ -nek megfeleltetett Riemann-gömbfelületbeli pont koordinátái  $(x,y,z)$ , akkor ezek kapcsolata:

$$a + bi = \frac{x + iy}{1 - z}$$

**Megjegyzés.** Ismerős geometriai leképezésre bukkanhatunk, ha a Riemann-gömbfelület egy  $(x,y,h)$  és  $(x,y,-h)$  pontjának megfelelő komplex számnak a kapcsolatát írjuk fel. Legyen ugyanis

$$z = \frac{x + iy}{1 - h} \quad \text{és} \quad w = \frac{x + iy}{1 + h}$$

Ekkor a  $z$  konjugáltját a  $w$ -vel összeszorozva azt kapjuk, hogy:

$$w \cdot \bar{z} = 1$$

Amiből az következik, hogy a végpontok origótól vett távolságának a szorzata 1, azaz 1 a két szám hosszának mértani közepe. Ez viszont azt jelenti, hogy  $w$  nem más, mint a  $z$  inverziója az egységkörre vonatkozóan és az inverziót kifejező komplex függvény a

$$w = \frac{1}{\bar{z}}$$

leképezés. Eszerint a reciprok-konjugált (de a reciprok is) egy origón át nem menő kört körbe, az origón átmenő kört egyenesbe, egy origón át nem haladó egyenes egy origón átmenő körbe és egy origón áthaladó egyenest saját magába képezi.

Ha tehát a  $\mathbf{C}$ -hez hozzáveszünk egy  $\infty$ -nel jelölt objektumot, és ennek megfeleltetjük a  $P$  pólust, akkor a

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

halmaz kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozható a Riemann-gömbfelülettel. Ahhoz, hogy ennek folytonosságáról beszélhessünk, definiálnunk kell gömbi környezeteket. Ezek a következő alakú halmazok lesznek:

$$B_r(\infty) = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| > \frac{1}{r} \right\} \cup \{\infty\}$$

ahol  $r > 0$ .

**Feladat.** Igazoljuk, hogy  $CU\{ \}$  kompakt (topologikusan, ill. gyakorlásképpen sorozatkompakt)!

(Útmutatás: az elsőhöz az origó körüli zárt gömbök kompaktságát, a másodikhoz a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételt kell használni (persze korlátos sorozatra).)

Ha  $CU\{ \}$ -t lefed egy nyílt halmazrendszer, akkor  $-t$  is lefed belülük egy, mondjuk  $U$ .  $U$  lefed az egy gömbi környezetét, mondjuk  $B_r( )$ -t. Elegendő tehát tekintenünk  $CU\{ \}$  lefedéséhez a halmazrendszerből az  $U$ -t és a  $B_r( )$  komplementerét lefedő halmazokat. De ez utóbbiakból véges sok is van melyek még mindig lefedik, mert  $B_r( )$  komplementere a 0 középponttú  $1/r$  sugarú zárt körlap, mely kompakt.

## Komplex sorozatok

Mint ahogy  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  (mint normált vektortér), a komplex sorozatok azon tulajdonságai, melyek a vektortér műveletekkel és az  $\|\cdot\|_2$  euklideszi normával kapcsolatosak mind  $\mathbb{R}^2$ -ben ismertnek tekinthetők. A sorozatok konvergenciáját ugyanúgy definiáljuk, mint  $\mathbb{R}^2$ -ben:

$$(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^+} \text{ konvergens}$$

$\Updownarrow$  def

$$\exists z \in \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists N \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad (n > N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon)$$

Ekkor a fenti  $z$  egyértelmű, és ez a sorozat határértéke ( $\lim(z_n)$ )

A legfontosabb jellemzése tehát a konvergenciának az  $\mathbb{R}^2$ -ben kölcsönzött, a komponensekre vonatkozó kritérium:

**Tétel** ? A  $\mathbb{C}$ -beli  $(z_n) = (a_n + ib_n)$  sorozat konvergens akkor és csak akkor, ha

$$\begin{aligned} &(a_n) \text{ konvergens és} \\ &(b_n) \text{ konvergens.} \end{aligned}$$

$$\text{Ekkor } \lim(z_n) = \lim(a_n) + i \cdot \lim(b_n)$$

Fontos látni a kapcsolatot a sorozathatárérték és a függvényhatárérték között. Egy  $(z_n)$  komplex sorozat nem más, mint egy

$$\zeta : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$$

függvény. Ha  $\mathbb{Z}$ -t komplex részhalmaznak gondoljuk (ahogy az is), akkor az egyetlen torlódási pontja a  $\infty$ . Ezért egy sorozatnak pontosan akkor létezik határértéke és ez a  $w$  szám, ha mint függvénynek létezik határértéke és az a  $w$ . Azaz:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \in \overline{\mathbb{C}} \iff \exists \lim_{\infty} \zeta = w \in \overline{\mathbb{C}}$$

Ebből következik, hogy a függvényhatárértékre vonatkozó minden műveleti szabály öröklődik a sorozathatárértékre.

## Nullsorozatok

A 0 komplex számhoz tartó sorozatok nullsorozatok. Az abszolútérték és a szorzás jó tulajdonságai miatt öröklődnek a valós sorozatok alábbi tulajdonságai.

**Állítás?** Legyen  $(z_n)$  komplex számsorozat.

1. *abszolútérték:*  $z_n \rightarrow 0$  akkor és csak akkor, ha  $|z_n| \rightarrow 0$
2. *eltolás:*  $z_n \rightarrow z$  akkor és csak akkor, ha  $(z_n - z) \rightarrow 0$
3. *"http://wiki.math.bme.huK · 0"http://wiki.math.bme.hu:* ha  $(w_n)$  korlátos és  $z_n \rightarrow 0$ , akkor  $(w_n \cdot z_n) \rightarrow 0$
4. *majoráns:* ha  $(v_n) \rightarrow 0$  valós és  $|z_n| < v_n$ , akkor  $z_n \rightarrow 0$
5. 
$$\limsup \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$$
  
*hányadoskritérium:* ha  $\limsup \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$ , akkor  $z_n \rightarrow 0$
6. 
$$\limsup \sqrt[n]{|z_n|} < 1$$
, akkor  $z_n \rightarrow 0$   
*gyökkritérium:* ha  $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} < 1$ , akkor  $z_n \rightarrow 0$

Ezek közül **C**-ben a legjellegzetesebb a "http://wiki.math.bme.huK · 0"http://wiki.math.bme.hu, hiszen ez azt állítja, hogy nem csak a  $v_n \cdot z_n$  skalárral történő szorzás esetén igaz a "http://wiki.math.bme.hu korlátos - nullához"http://wiki.math.bme.hu tartó kritérium (mindkét változóban), hanem komplex szorzás is ilyen.

### 1. Feladat

$$\left( \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{3n}} \right)^n \rightarrow ?$$

(*Útmutatás: hivatkozzunk a "http://wiki.math.bme.hu korlátos szor nullához tartó"http://wiki.math.bme.hu kritériumra.*)

$$\left( \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{3n}} \right)^n = \left( \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{3}} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n^n}}$$

### 2. Feladat.

$$\frac{\sqrt[n]{n^3 + 2n}}{i + 1} \rightarrow ?$$

ahol az  $n$ -edik gyök a valós számból vont valós gyök.

(*Útmutatás: "http://wiki.math.bme.hu i-telenítsük"http://wiki.math.bme.hu a nevezőt.*)

$$\frac{\sqrt[n]{n^3 + 2n}}{i + 1} = \frac{(i - 1) \sqrt[n]{n^3 + 2n}}{-1 - 1} = \frac{i \sqrt[n]{n^3 + 2n} - \sqrt[n]{n^3 + 2n}}{-2} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

ugyanis

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n^3} = \sqrt[n]{n^3} \leq \sqrt[n]{n^3 + 2n} \leq \sqrt[n]{n^3 + \frac{n^3}{2}} = \sqrt[n]{\frac{3}{2}n^3} = \sqrt[n]{\frac{3}{2}} \sqrt[n]{n^3} \rightarrow 1$$

### 3. Feladat.

$$\left(\frac{n+i}{n}\right)^n \rightarrow ?$$

(Útmutatás: használjunk trigonometrikus alakot és hatványozzunk.)

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+i}{n}\right)^n &= \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)^n \cdot \left(\cos\left(n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + i \sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \cos 1 + i \sin 1 \end{aligned}$$

Mert a szögfüggvények argumentumában lévő sorozat az 1-hez tart (pl L'Hospital-szabállyal majd átviteli elvvel ellenőrizhet?), a első szorzó pedig az 1-ehez tart (rendőrelvvel). Az argumentumokban lévő értéket természetesen radiánban kell venni: nem 1°, hanem 1 rad.

## Komplex sorok

Minden normált térben definiálhatók sorok és ezek konvergenciája, így  $\mathbf{C}$ -ben is. Az  $(z_n)$  sorozat

$$s_n = \sum_{k=1}^n z_k$$

részletösszegeinek  $(s_n)$  sorozatát a  $(z_n)$ -ből képzett **sornak** nevezzük és  $\sum(z_n)$ -nel jelöljük. Azt mondjuk, hogy a  $\sum(z_n)$  sor konvergens és összege a  $w$  komplex szám, ha  $(z_n)$  részletösszegeinek sorozata konvergens és határértéke  $w$ . Ekkor az összeget a

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

szimbólummal jelöljük.

### Komponensek

Az egyik módja, hogy a komplex sorok konvergenciáját visszavezessük a valósokra, ha a komponenssorozatokat vesszük:

$$\sum(z_n) = \sum(x_n + iy_n)$$

esetén az összegeket elképzelve, azokból az  $i$  kiemelhető, így



$$\sum(z_n) = \sum(x_n) + i \sum(y_n)$$

ahol az összeget és a szorzást tagonként végezzük. Ekkor egy sor pontosan akkor konvergens, ha mindkét komponense konvergens.

## Cauchy-kritérium és abszolút konvergencia

Világos, hogy egy sor, mint részletösszezsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat. Ez a Cauchy-kritérium sorokra.

Létezik az abszolút konvergencia fogalmi is. Egy sor abszolút konvergens, ha a tagjai abszolútértékéből képezett sorozat konvergens. Igaz az, hogy egy normált tér akkor és csak akkor teljes, ha minden abszolút konvergens sor konvergens benne. (És  $\mathbb{C}$  teljes, mert minden Cauchy-sorozat konvergál benne, ami pont annak a módja, hogy belássuk az előbbi kritériumot.) Persze az előfordul a teljes terekben is, hogy konvergens sorozatok nem lesznek abszolút konvergenssek.

## Kritériumok az abszolút konvergenciára

Az abszolút konvergencia fenti kritériumából egy sor komplex sorokra vonatkozó kritérium adódik a valósból.

**Tétel** Legyen  $(z_n)$  komplex számsorozat.

1. **Szükséges kritérium:** Ha  $\sum(z_n)$  konvergens, akkor  $(z_n)$  nullsorozat.

2.  $\sum(z^n)$

**Geometriai sor:** ha  $|z| < 1$ , akkor  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  konvergens és az összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

3. **Összehasonlító kritérium:** ha az  $\sum(r_n)$  valós sor konvergens és  $|z_n| \leq r_n$  majdnem minden  $n$ -re, akkor  $\sum(z_n)$  abszolút konvergens (*majoráns-kritérium*). Ha az  $\sum(r_n)$  pozitív valós sor divergens és  $r_n \leq |z_n|$  m.m., akkor  $\sum(z_n)$  divergens (*minoráns-kritérium*).

4. **p-edik hatvány próba:** ha  $p > 1$  valós, akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  valós sor konvergens.

Ha  $0 < p \leq 1$ , akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  valós sor divergens.

5. **Hányadoskritérium:** ha  $\limsup \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$ , akkor  $\sum(z_n)$  abszolút konvergens. Ha a  $\limsup \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$ , akkor divergens.

6. **Gyökkritérium:** ha  $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} < 1$ , akkor  $\sum(z_n)$  abszolút konvergens. Ha a  $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} > 1$ , akkor divergens.

**Megjegyezzük**, hogy ha a gyökök és hányadosok sorozata konvergál, akkor ugyanahhoz a számhoz konvergálnak.

4. Konvergens-e illetve abszolút konvergens-e?

$$\sum \left( \frac{i^n}{n} \right)$$

5.

1. Konvergencia-e és mi a határértéke:  $\frac{n!}{n^n} i^n$
2.  $\sum \left( \frac{n!}{n^n} i^n \right)$
3. Konvergencia-e  $\sum \left( \frac{n!}{n^n} z^n \right)$   
Milyen  $z$ -re konvergens:

(*Útmutatás: használjuk a hányadoskritériumot, vagy vizsgáljuk, hogy milyen rendben tartanak a végtelenhez az összetevő sorozatok.*)

$$\frac{\left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} i^{n+1} \right|}{\left| \frac{n!}{n^n} i^n \right|} = \frac{n+1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

azaz 0-hoz tart-

6.

1. Konvergencia-e és mi a határértéke:  $\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n^4}}$
2.  $\sum \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n^4}} \right)$
3. Konvergencia-e  $\sum \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{i|z|}{n}\right)^{n^4}} \right)$   
Milyen  $z$ -re konvergens:

(*Útmutatás: használjuk a gyökkritériumot.*)

$$\sqrt[n]{\left|1 + \frac{i}{n}\right|^{n^4}} = \left|1 + \frac{i}{n}\right|^{n^3} = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\right)^n \geq (1 + \varepsilon)^n \rightarrow +\infty$$

Így a reciproka a 0-hoz tart, azaz a limeszup  $< 1$ .

5. gyakorlat

7. gyakorlat