

Tartalomjegyzék

- 1 Folytonosság
- 2 Határérték
- 3 Feladat
folytonosságra
- 4 Feladatok
határértékre
- 5
C-differenciálhatóság
 - ♦ 5.1
Harmonikus
társ keresése

Folytonosság

Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{C}$ halmazon értelmezett f függvény folytonos a $z_0 \in A$ pontban, ha z -ben f folytonos mint $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény. Maga az f folytonos, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

A többváltozós valós analízisből ismert tény miatt fennáll:

Állítás. Az f komplex függvény pontosan akkor folytonos az értelmezési tartománya egy pontjában, ha ott a függvény valós és képzetes része, mint kétváltozós valós függvény folytonos. Azaz, ha f -et a következő alakban írjuk:

$$f(z) \equiv f(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

ahol u és v valós értékű függvények (rendre $\operatorname{Re}(f)$ és $\operatorname{Im}(f)$), továbbá $z_0 = x_0 + iy_0 \in \operatorname{Dom}(f)$, akkor a következők ekvivalensek:

1. f folytonos a z_0 -ban
2. u és v függvények folytonosak az (x_0, y_0) -ban

Határérték

Komplex függvény $\mathbb{C}$ -beli pontban vett $\mathbb{C}$ -beli határértéke ugyanúgy értelmezett, mint az $\mathbb{R}^2$ esetben. Itt is érvényes, hogy pontosan akkor létezik a határérték, ha a komponensfüggvényeknek létezik a határértéke és ekkor a határérték egyenlő lesz a valós és képzetes komponens határértékéből alkotott komplex számmal.

Azért érdemes külön is megfogalmazni a határérték definícióját, bár az teljesen analóg a valós esettel. Legyen f egy az $A \subset \mathbb{C}$ halmazon értelmezett, $\mathbb{C}$ -be képező függvény. Legyen $u \in \overline{A}$ az A torlódási pontja, azaz minden $r > 0$ esetén legyen olyan $a \in A$, hogy $a \in B_r(u) \setminus \{u\}$. Azt mondjuk, hogy az f -nek a $u \in \overline{A}$ elem határértéke az v -ban, ha

$$\text{minden } \varepsilon > 0 \text{ esetén létezik olyan } \delta > 0, \text{ hogy minden } z \in A \cap B_\delta(u) \setminus \{u\} \text{-re } |f(z) - v| < \varepsilon$$

ahol természetesen a $B_\delta(u)$ környezetei a már említett módon értendők.

A kétváltozós függvények közötti határérték-folytonosság kapcsolat is megfogalmazható komplex módon. Itt

az $f = u + vi$ függvény határértékén a $z = x + iy$ pontban a $\lim_x u + i \lim_y v$ szám adja. Ekkor

Állítás. Az f komplex függvény pontosan akkor folytonos az értelmezési tartománya egy belső pontjában, ha ott a függvénynek létezik határértéke és az a helyettesítési érték.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

A komplex függvények folytonosságának egyik, de nem egyetlen feltétele az, hogy az (u, v) reprezentáció $\mathbf{R}^2$ -ben lineáris legyen, hiszen a véges dimenziós normált terek között ható lineáris leképezések folytonosak. A nem-folytonoságnál érdemes a határérték nem létezését vizsgálni, hátha ez célra vezet.

Feladat folytonosságra

Feladat. Legyen $w \in \mathbf{C}$. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények folytonosak!

1. $z \mapsto w + z$
2. $z \mapsto w \cdot z$
3. $z \mapsto \bar{z}$
4. $z \mapsto \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$

Megoldás.

Az 1. az $\mathbf{R}^2$ -ben eltolás a w -nek megfelelő vektorral ($\operatorname{Re}(w)$, $\operatorname{Im}(w)$)-vel, így affin leképezés, ami folytonos.

2. a w mátrixreprezentációjának megfelelő mátrixszal való szorzás, azaz lineáris leképezés, s így folytonos.

3. azaz a konjugálás: $(x, y) \mapsto (x, -y)$ a valós tengelyre való tükrözés, ami szintén lineáris.

Végül a reciprok:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

így, mint $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ függvény:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

amely olyan, hogy mindkét komponensfüggvénye folytonos valós függvényekből van összeállítva a folytonosságot megfelelő módon, azaz az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

Feladat. Folytonos-e a $z = 0$ -ban az

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Im}(z)^3 + i \cdot \operatorname{Re}(z)^4}{\bar{z} \cdot z}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

Megoldás.

Ha $z = x + iy$ és $(x,y) \neq (0,0)$, akkor:

$$f(x, y) = \left(\frac{\frac{y^3}{x^2 + y^2}}{\frac{x^4}{x^2 + y^2}} \right)$$

A komponensfüggvények felírhatók egy 0-hoz tartó és egy korlátos függvény szorzataként:

$$\left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = |y| \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |y| \cdot \frac{y^2}{y^2} = |y|$$

és

$$\left| \frac{x^4}{x^2 + y^2} \right| = x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2} = x^2$$

így $(x,y) \rightarrow (0,0)$ esetén a 0-hoz tartanak, így a függvény maga a $(0,0)$ -hoz, azaz a komplex 0-hoz. Mivel itt a függvény értéke 0, ezért f a 0-ban folytonos.

Ha folytonos komplex függvényekből alapelemek segítségével alkottunk függvényeket, akkor azok is folytonosak maradnak, mert a megfelelő $\mathbf{R}^2$ -beli függvények ekkor olyanok lesznek, melyek mindegyik komponensfüggvénye a valós alapelemek segítségével vannak definiálva. Ám, ezek megőrzik a folytonosságot.

Állítás. Ha f és g komplex függvények és az z_0 pontban (mindketten értelmezettek és) folytonosak, akkor

1. $f + g$
2. $f \cdot g$
3. $\bar{f}$
4. $g(z_0) \neq 0$ esetén f/g

is folytonos z_0 -ban.

Folytonos függvények kompozíciója is folytonos (az kompozíció értelmezési tartományán).

Feladat. Folytonos-e a $z = i$ -ben az

$$f(z) = \begin{cases} \frac{iz + 1}{|z - i|}, & \text{ha } z \neq i \\ 0, & \text{ha } z = i \end{cases}$$

Ha $z = x + iy$ és $(x, y) \neq (0, 1)$, akkor:

$$f(x, y) = \left(\frac{-y + 1}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} \right)$$

Már az első komponens határértéke sem létezik, hisz $(x, y) = (0, y)$ mentén alulról a $(0, 1)$ -hez tartva a határérték -1 , az $x=y-1$ mentén pedig $-1/\sqrt{2}$ kettő.

A második tényező szintén nem.

Feladatok határértékre

Feladat. Igazoljuk definíció szerint, hogy

$$\begin{aligned} 1. \quad & \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty \\ 2. \quad & \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0 \end{aligned}$$

1. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor azt kell belátnunk, hogy létezik $\delta > 0$, hogy teljesüljön $|z| < \delta$ esetén, hogy a függvényérték a ε sugarú környezetébe esik, azaz:

$$\left| \frac{1}{z} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Világos, hogy ezt azt jelenti, hogy

$$|z| < \varepsilon$$

amit reciprokvonással kaptunk. Ha tehát ha $\delta := \frac{1}{\varepsilon}$ és $|z| < \delta$, akkor
["http://wiki.math.bme.hu/felfel"](http://wiki.math.bme.hu/felfel)<http://wiki.math.bme.hu> következtetve kijön a kívánt egyenlőtlenség.

2. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor azt kell belátnunk, hogy létezik $\delta > 0$, hogy teljesüljön $|z| > 1/\delta$ esetén, hogy a függvényérték a 0 -nak ε sugarú környezetébe esik, azaz:

$$\left| \frac{1}{z} \right| < \varepsilon$$

Világos, hogy ezt azt jelenti, hogy

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}$$

amit reciprokvonással kaptunk. Ha tehát ha $\varepsilon := 1/|z|$ és $|z| > 1/\varepsilon$, akkor
["http://wiki.math.bme.hu/felfele"](http://wiki.math.bme.hu/felfele) <http://wiki.math.bme.hu> következtetve kijön a kívánt egyenlőtlenség.

A végtelen határértékekkel történő számolás szabályai előtt definiálnunk kell néhány kibővített műveletet. Ezt a következők szellemében tesszük:

Ha a és b valamelyike a ∞ szimbólum (a másik, ha nem ilyen, akkor komplex szám), akkor az $a * b$ alpműveletet akkor értelmezzük a c szimbólumként (mely szintén vagy komplex szám, vagy az ∞), ha minden a határérték f függvény esetén és minden b határérték g függvény esetén $a f * g$ szükségeszerűen a c -hez tart. Ekkor mondjuk tehát, hogy az

$$a * b = c$$

definíció jó.

Például a $\infty + \infty$ művelet feltétlenül értelmezett és értéke a ∞ , mert könnyen látható, hogy bármely két, a ∞ -hez tartó függvény összege is a ∞ -hez tart. De a $0 \cdot \infty$ művelet nem értelmezhető, mert van két függvénypár, mely ilyen alakú határértékekkel rendelkezik, de a szorzatuk máshoz tart. Pl.: $(1/\operatorname{Re}(z)) \cdot \operatorname{Re}(z) \rightarrow 1$, a $z=0$ -ban, de $(1/\operatorname{Re}(z)) \cdot 2 \operatorname{Re}(z) \rightarrow 2$ a $z=0$ -ban.

Definíció ? Végtelen és alpműveletek ? Az alábbi műveleti szabályokat vezettük be a ∞ szimbólumra vonatkozóan, az alábbiakban z tetszőleges komplex szám, n tetszőleges nemnulla komplex szám:

1. $\infty + z = \infty$,
2. $\infty - z = \infty$, $z - \infty = -\infty$,
3. $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot n = \infty$,
4. $\frac{z}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{z} = \infty$,

továbbá a szorzás és az összeadás kommutatív.

Megjegyezzük még, hogy $\overline{\infty} = \infty$, azaz a végtelen konjugáltja saját maga.

Definíció ? Határozatlan esetek ? Az alábbi alpműveletek nem értelmezhetők:

1. $\infty - \infty$,
2. $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$,
3. $\frac{\infty}{\infty}$,
4. $\frac{0}{0}$,

Tétel ? Végtelen határérték és alpműveletek ? Ha az f és g komplex függvényeknek létezik határértékük az $u \in \mathbb{C}$ helyen, az $f * g$ alpművelettel elkészített függvény értelmezési tartományának torlódási pontja u és a $\lim_u f * \lim_u g$ alpművelet elvégezhető, akkor az $f * g$ függvénynek is van határértéke u -ban és ez:

$$\lim_u (f * g) = \lim_u f * \lim_u g$$

Ezenkívül a határozatlan esetekben, amikor a határértékekkel végzett műveletek nem értelmezettek, az alapműveletekkel elkészített függvények határértékeire nem adható általános képlet (mert alkalmasan választott esetekben máshoz és máshoz tartanak).

A bizonyításról. Ennek a tételnek a bizonyítása minden nehézség nélkül elvégezhető vagy az $\mathbf{R}^2$ -beli sorozatokra vonatkozó átviteli elv vagy a komponensfüggvények határértékére történő hivatkozás útján. Minenkelőtt azt kell szem előtt tartanunk, hogy a végtelenhez való tartás, a függvény abszolútértékének plusz végtelenhez tartását jelenti:

$$\exists \lim_{z \rightarrow 0} f = \infty \iff \exists \lim_{z \rightarrow 0} |f| = +\infty$$

Feladat. Adjuk példákat arra, hogy a határozatlan alakú határértékeket valóban nem lehet definiálni.

Nézzük a 0-ban az alábbi függvényeket:

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \rightarrow \infty \quad \text{miközben} \quad \left(\frac{1}{z} + 2\right) - \frac{1}{z} = 2 \rightarrow 2$$

$$\frac{1}{z} \cdot z = 1 \rightarrow 1 \quad \text{miközben} \quad \frac{2}{z} \cdot z = 2 \rightarrow 2$$

$$\frac{1}{z} / \frac{1}{z} = 1 \rightarrow 1 \quad \text{miközben} \quad \frac{2}{z} / \frac{1}{z} = 2 \rightarrow 2$$

$$\frac{z}{z} = 1 \rightarrow 1 \quad \text{miközben} \quad \frac{2z}{z} = 2 \rightarrow 2$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

1. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}(z)}{z}$,
2. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{z^2 + 1}$,
3. $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{z-1} + i}{\frac{1}{z^2-1} - i}$,
4. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} - \frac{2}{\bar{z}}$,
5. $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{\frac{1}{z+i} + i}{\bar{z} - i}$,

Megoldás. 1. nemnulla z -re:

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{z} = \frac{\operatorname{Im}(z)\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{yx - y^2i}{x^2 + y^2}$$

de ekkor például az első komponensfüggvény $x = 0$ felől közelítve 0, míg az $x = y$ -felől $1/2$, azaz nem létezik az első komponensnek a $(0,0)$ -ban határértéke, azaz a komplex függvénynek sem.

$$2. \frac{z-i}{z^2+1} = \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z+i} \xrightarrow{z \rightarrow i} \infty$$

$$3. \frac{\frac{1}{z-1} + i}{\frac{1}{z^2-1} - i} = \frac{\frac{1+iz-i}{z-1}}{\frac{1-iz^2+i}{z^2-1}} = \frac{1+iz-i}{z-1} \cdot \frac{(z+1)(z-1)}{1-iz^2+i}$$

$$\frac{iz+1-i}{-iz^2+i+1}(z+1)\Big|_1 = \frac{1}{1} \cdot 1$$

$$4. \frac{1}{z} - \frac{2}{\bar{z}} = \frac{\bar{z} - 2z}{z\bar{z}} \quad \text{csak a valós részt nézve:}$$

$$\left| \frac{-x}{x^2+y^2} \right|$$

az $(x,y)=(x,0)$ esetben a $(0,0)$ -hoz tartva: végtelen, de $(x,y)=(0,y)$, akkor 0. tehát nincs határérték.

$$5. \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\frac{1}{z+i} + i}{\bar{z} - i} = \left(\frac{\infty}{0} \right) = \infty.$$

Feladat. Adjuk meg minden $z_0 \in \mathbb{C}$ számra az alábbi függvény határértékét!

$$1. f(z) = \frac{z}{\bar{z} - z},$$

$$2. f(z) = \frac{z^2}{\bar{z}z - 1},$$

$$1. \text{Dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \neq z\}$$

Folytonos az értelmezési tartományában. A határon:

$$\frac{z}{\bar{z} - z} = \frac{x+iy}{2iy}$$

$z_0 \neq 0$ esetén

$$\left| \frac{x+iy}{2iy} \right| \geq \frac{|z_0|/2}{2|y|} \rightarrow \infty$$

$z_0 = 0$ esetén:

$$\frac{x+iy}{2iy} = \frac{1}{2} - i \frac{x}{2y}$$

ismert, hogy nincs határérték.

$$2. \text{Dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z \neq 1\}$$

Az egységkör pontjaitól különböz?kre folytonos, az egységk?r?n a v?gtelen, a v?gtelenben pedig nincs hat?r?rt?k. Ugyanis:

$$|f(z)| = \frac{|z|^2}{|\bar{z}z - 1|},$$

?gy az egységk?r?n a sz?ml?l? az 1-hez, a nevez? a null?hoz tart. A v?gtelenben pedig t val?ssal:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t + 0.i) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2 - 1} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t.i) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^2}{t^2 - 1} = -1$$

C-differenci?lhat?s?g

A komplex differenci?lhat?s?g az el?z? észrev?telekkel szoros kapcsolatban lesz. Egyfel?l

$$(w \cdot z)' = w \in \mathbb{C}$$

$$(z^2)' = 2z \in \mathbb{C}$$

mutaja, hogy ha a Jacobi-m?rtix hasonl?k?ppen viselkedik a komplex sz?mok m?rtixreprezent?ci?j?ban, mint az egyv?ltoz?s val?s deriv?lt. M?sr?szt a

$$(\bar{z})' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{C}$$

mutatja, hogy nem minden val?san deriv?lhat? f?ggv?ny lesz komplex deriv?lhat?. N?zz?k akkor az egyv?ltoz?s val?s mint?j?ra a defin?ci?t majd l?ssuk a komplex differenci?lhat?s?g jellemz?s?t.

Defin?ci? - *Komplex differenci?lhat?s?g, komplex deriv?lt* - Legyen f a z_0 egy k?rnyezet?ben ?rtelmezett f?ggv?ny. Azt mondjuk, hogy f $\mathbb{C}$ -deriv?lhat? z_0 -ban ?s deriv?ltja a w sz?m, ha

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w$$

Jel?l?se: $f'(z_0)$.

Azt, hogy az f a z_0 -ban komplex deriv?lhat? m?g ?gy is jel?lj?k, hogy

$$f \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(z_0).$$

Pontbeli deriv?ltra p?lda a k?vetkez?.

P?lda. Milyen n egész sz?mokra deriv?lhat? a 0-ban az al?bbi f?ggv?ny?

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z} \cdot z^n, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Mo. Ha $n > 0$, akkor a különbségi hányados:

$$\frac{\bar{z} \cdot z^n - 0}{z - 0} = \frac{\bar{z} \cdot z^n}{z} = \bar{z} \cdot z^{n-1} \rightarrow 0 \quad \text{ha } z \rightarrow 0.$$

Ha $n = 0$, akkor

$$\frac{\bar{z} - 0}{z - 0} = \frac{\bar{z}}{z} = e^{i(-2\varphi)}$$

aminek nincs határértéke a 0-ban (az egységgörön mozog a végpont).

Ha $n < 0$, akkor

$$\frac{\bar{z} z^n - 0}{z - 0} = \frac{\bar{z}}{z^{-n+1}} = \frac{\bar{z}}{z} \frac{1}{z^{-n}}$$

ami a 0-ban a komplex végtelenbe tart, mert a hossza a végtelenbe tart.

Tehát $n > 0$ -ra a függvény komplex deriválható a 0-ban, más $n < 1$ -re nem deriválható.

Tétel. - A komplex differenciálhatóság jellemzése - Legyen f a $z_0 = x_0 + iy_0$ egy környezetében értelmezett függvény. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

- 1) $f \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(z_0)$
- 2) $f \in \text{Diff}_{\mathbb{R}}(x_0, y_0)$ és $[df(x_0, y_0)] \in \mathbb{C}$.

Bizonyítás. Legyen f a $z_0 = x_0 + iy_0$ egy környezetében értelmezett függvény és w komplex szám. Tekintsük a következő határértéket:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - [w] \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

ahol az $z, z_0, f(z), f(z_0)$ mennyiségekre úgy tekintünk, mint vektorokra. Ez ekvivalens a következővel:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{|z - z_0|} - \frac{w \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} \right| = 0$$

ahol az elobb említettek már algebrai értelemben komplex számok, nem feltétlenül vektorok. Azaz

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - w \right) \right| = 0$$

Itt $(z - z_0)/|z - z_0|$ a komplex egységgörön "http://wiki.math.bme.hu/futó" http://wiki.math.bme.hu függvény,

hossza 1, ezért a fenti ekvivalens a következ?vel:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - w \right| = 0$$

Ami viszont ugyanakkor igaz mint:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w$$

Ha a következtetésben felfelé vizsgálódunk, tehát feltesszük a komplex deriválhatóságot ahol w a komplex derivált, akkor azt kapjuk, hogy a w mátrixreprezentációjával való mátrixszorzás alkalmas lineáris leképezés a valós derivált számára, azaz létezik $[df(z_0)] = [w]$.

Másfel?l, ha f valósan deriválható és a deriváltja a w komplex számot reprezentálja, akkor komplexen is deriválható és komplex deriváltja pont w .

Cauchy--Riemann-egyenletek A fenti tételben a $[df(z)] = C$ feltétel (természetesen a totális deriválhatóság esetén) ekvivalens az alábbiakkal. Ha $f = u + iv$ és $z = x + iy$, akkor

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases}$$

Komplex deriváltfüggvény Ahol egy f komplex függvény komplex deriválható, ott a deriváltja:

$$f'(z) = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y v + i\partial_y u = \partial_x u - i\partial_y u = \partial_y v - i\partial_x u$$

Definíció - Regularitás - Az f komplex függvény reguláris a z pontban, ha f a z egy egész környezetén értelmezett, és a teljes környezetben komplex deriválható.

Feladat. Legyen $f(x+iy) = |x| + i|y|$. Hol komplex deriválható és hol reguláris f ?

Feladat. Legyen $f(x + iy) = x^2 + iy^3$. Hol komplex deriválható és hol reguláris f ?

Harmonikus társ keresése

Azt mondjuk, hogy a kétszer differenciálható $u = u(x, y)$ valós függvény *harmonikus*, ha

$$u''_{xx} + u''_{yy} \equiv \Delta u \equiv 0$$

itt Δ a Laplace-operátor (nem a Laplace-transzformátor!, hanem a vektoranalízisbeli vektormez?re Hesse-mátrix nyoma).

A C--R-egyenletek mutatják, hogy ha $f = u + iv$ reguláris, akkor u és v harmonikus függvények. Ugyanis:

$$u'_x = v'_y \text{ és}$$

$$v'_x = -u'_y$$

De u és v Hesse-mátrixa is szimmetrikus, ezért:

$$v''_{yy} = u''_{xy} = u''_{yx} = -v''_{xx}$$

azaz

$$\Delta v \equiv 0 \text{ és fordítva.}$$

Általában az a feladat, hogy ha adott u , akkor keressük az v harmonikus társát, v -t, mellyel $u+iv$ reguláris. Ha tehát adott u , akkor van F és G , hogy

$$\begin{aligned} F &= v'_y \\ G &= -v'_x \end{aligned}$$

Ami az egzakt differenciálegyenlet megoldásánál tanult parciális differenciálegyenlet megoldását igényli v -re, mint potenciálfüggvényre (ekkor f -et komplex potenciálnak nevezzük, mármint a $(v'_x(x,y), v'_y(x,y))$ síkbeli vektormező komplex potenciáljának; a v valódi potenciálja lenne. Ennek szükséges utánanézni máshol is!)

1.. Keressünk harmonikus párt az

$$u = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$$

függvényhez!

Mo. Van neki, ha $\Delta=0$. Ezt ellenőrizni kell, majd az előző módszerrel megkeresi v -t, amivel $u+iv$ reguláris.

6. gyakorlat

8. gyakorlat