<Matematika A3a 2008

Tartalomjegyzék

Komplex hatványsorok

Definíció ? *Hatványsor* ? Legyen (a_n) komplex számsorozat és z_0 **C**. Ekkor az $\sum(a_{n(}\mathrm{id}_{\mathbf{C}}-z_0)^n)$ függvénysort hatványsornak nevezzük és összegét, az

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

hozzárendelési utasítással értelmezett, a {z | $\sum(a_n(z-z_0)^n)$ konvergál } halmazon értelmezett függvényt a hatványsor **összegének** nevezzük. Középpontja z_0, együtthatósorozata (a_n).

A továbbiakban csak a $\sum(a_n z^n)$ alakú, azaz a 0 körüli hatványsorokkal foglalkozunk (ezzel nem csorbítjuk az általánosságot, mert eltolással megkaphatjuk a többit is).

Tétel ? *Cauchy?Hadamard-tétel* ? Ha (a) komplex számsorozat, $c = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ és

$$R = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad c = {}^{n}+\infty \\ +\infty, & \text{ha} \quad c = 0 \\ \frac{1}{c}, & \text{ha} \quad 0 < c < +\infty \end{cases}$$

akkor $\sum(a_n z^n)$ abszolút konvergens a $B_R(0)$ gömbön és divergens a $B_{1/R}($ $)$ gömbön.

A tétel minden részletre kiterjed? bizonyítását nem végezzük el, csak utalunk rá, hogy nyilvánvaló, hogy a Cauchy-féle gyökkritériumot kell benne használni. A tételbeli R sugarat a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük. R-et másként is kiszámíthajuk. Ha azt tudjuk, a hányadoskritérium alapján, hogy

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

akkor létezik és ezzel egyenl? az n-edik gyökök sorozata is:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = "\frac{1}{R}"$$

ahol az idéz?jel azt jelzi, hogy a konvergenciasugár lehet végtelen vagy 0 is.

7. Feladat. Mi az alábbi hatványsorok konvergenciaköre és -sugara?

1. $\sum\left((2i)^n n^3 (z-i)^n\right)$
2. $\sum\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)(z+1+i)^n\right)$
3. $\sum\left(\frac{in^{2008}}{n!}z^n\right)$

Analitikusnak nevezünk egy *f* komplex függvényt, a z_0 pontban, ha van olyan sugarú környezet és $\sum(a_n(z-z_0)^n)$ hatványsor, hogy minden *z* B (z_0)-ra *f* érelmezett, $\sum(a_n(z-z_0)^n)$ konvergens és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Ezt úgy jelöljük, hogy *f* C (z_0).

8. Feladat

1. Van-e olyan $\sum_{(0)}(a_n(z-2))$ hatványsor, mely konvergál a 0-ban, de divergál a 3-ban. Konvergál 2-ben, de divergál az 2,000001-ben?
2. Igazoljuk, hogy az alábbi függvény analitikus a nullában. Mi sorfejtés a konvergenciaköre?

$$f(z) = \frac{1}{4+z^2}$$

Hatványsorok összegfüggvényének folytonossága és differenciálhatósága

Tétel ? Ha (a_n) komplex számsorozat, akkor az $\sum(a_n z^n)$ hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciakör belsejében. S?t, reguláris is ott.

Emlékeztetünk arra, hogy egy függvény reguláris egy pontban, ha a pont egy környezetében mindenütt értelmezett és komplex deriválható. A tétel szerint tehát analitikus függvény reguláris. A döbbenetes azonban, hogymint kés?bb kiderül: reguláris függvény analitikus: *f* C (z_0) akkor és csak akkr, ha *f* Reg(z_0).

Bizonyítás. Legyen *z* a konvergenciakör egy bels? pontja és Δ*z* olyan, hogy még *z* + Δ*z* is a konvergenciakör belsejébe esik. Ekkor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((z+\Delta z)^n - z^n) =$$

mert mindkét sor konvergens, ekkor algebrai azonosságokkal:

$$= \Delta z \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z^k z^{n-1-k}$$

vagy ha tetszik nemnulla Δz-vel:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\Delta z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z^k z^{n-1-k}$$

a jobb oldalon álló sor konvergenciáját a gyökkritériummal láthatjuk be:

$$\left| a_n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z^k z^{n-1-k} \right| \leq |a_n| \cdot nr^n$$

ahol r olyan pozitív szám, hogy | $z + \Delta z$ | < r < R (ez utóbbi a hatványsor konvergenciasugára). És

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot nr^n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot 1 \cdot r \leq \frac{1}{R} r < 1$$

Így azt kaptuk, hogy minden olyan Δz-re, melyre | $z + \Delta z$ | < r, teljesül és $|\Delta z| <$ $/(1+\sum_n |a_n| nr^n)$=:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq |\Delta z| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| nr^n < \varepsilon.$$

Hosszadalmasabb számolásokkal, de lényegében ugyanígy kimutatható, hogy a hatványsor összegfüggvénye komplex differenciálható is a konvergenciakör belsejében és deriváltja a formális tagonkénti deriválással kapott sor összegfüggvényével egyenl?, tehát:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$$

Elemi függvények

Hatványfüggvények

A

$$w = z^n$$

típusú függvények komplex hatványfüggvények. n **Z** esetén, komplex deriváltjuk kiszámítható, $n \neq -1$ esetben komplex primitív függvényük is van a következ? értelemben:

Mivel

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

ezért *n* ≠ -1 esetén az az *F*(*z*) függvény, melyre $F'(z)=z^n$ nem más, mint

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

ahol C komplex konstans. *n* ≠ -1-re nincs primitív függvénye, mert a logaritmus nem egyérték? a komplex számok között.

Komplex vonalintegrál értelmezhet? a G: [a,b] $\longrightarrow$ **C** folytonos függvény, mint görbe esetén azzal a különlegességgel, hogy a szorzás a komplex szorzás:

$$\int_G f(z)\,\mathrm{d}z =_{\mathrm{def}} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\cdot\Delta z_i$$

Feltéve persze, hogy létezik és véges. Itt z_i mindig a G görbe valamely pontját jelöli, amit az [a,b] egy felosztásának osztópontjainak G általi képeib?l kapunk.

Ekkor fennáll a komplex Newton-Leibniz-formula. Ha a G görbe olyan nyílt halmazban halad, melyben az *f*-nek van primitív függvénye (egyérték? függvénye!) és *f* komplex integrálható, akkor z_1 és z_2 a végpontok esetén (*a* és *b* képe), a komplex integrál kiszámítható így:

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_G f(z)\,\mathrm{d}z$$

Ha a görbe belép az *f* értelmezési tartományának olyan részére, melyben a függvénynek nincs egyértelm? primitív függvénye, akkor az integrál értéke függhet a G úttól.

1. Feladat. Legyen G a 3 középpontú, 1 sugarú kör fels? félköre (pozitív irányítással). Számítsuk ki a

$$\int_G 3z^2 + 1\,\mathrm{d}z$$

integrált.

2. Feladat. Legyen G az origó körüli 2 sugarú kör vonal. Mennyi az

a) $\displaystyle\int_G \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z$ és a b) $\displaystyle\int_G \frac{z+1}{z}\,\mathrm{d}z$

integrál.

A hatványfüggvények inverzei szintén nem egyérték? függvények.

Exponenciális függvény

$$e^z =_{\text{def}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Ebb?kkiderül az exponenciális függvény sok tulajdonsága. Például, ha z = x + iy, akkor

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Ebb?l rögtön következik, hogy komplex exponenciális függvény periodikus, periódusa a p = 2 i:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot e^0 \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z(1 + 0i)$$

3. Feladat. Oldjuk meg az

$$e^z = 1 + i$$

egyenletet!

Írjuk át 1+i-t exponenciális alakba:

$$1 + i = e^{\ln \sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

így

$$z = \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2\pi i$$

4. Feladat. Oldjuk meg az

$$e^{iz} + ie^{-4iz} = 0$$

egyenletet!

Komplex logaritmus és a reciprok integrálja

Tekintsük a

$$w = e^z$$

hozzárendelést! Ha w-t exponenciális alakban írjuk, megfeleltethetjük egymásnak a z algebrai alakját w trigonometrikus alakjával:

$$w = re^{i\varphi} = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

azaz

$r = e^x$ és $\varphi = y$

Ebb?l is látható, hogy a fordított leképezés végtelen sok értk?, hiszen ha y_1 = 2 + y, akkor w(x+iy)= w(x+iy_1). Ekkor a Riemann-felület egy végtelen sok Riemann-levélb?l áll.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

$$\int_{G_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{G_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x$$

ahol G_1 az egységkör a + irányban i-t?l -i-ig, G_2 az egységkör a - irányban i-t?l -i-ig.

$$\int_{i,\,(G_1)}^{-i} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = [\mathrm{Log}(z)]_i^- i = \mathrm{Log}(e^{i\frac{3}{2}\pi}) - \mathrm{Log}(e^{\frac{1}{2}\pi}) = i\pi$$

ahol Log a logaritmus f?része, hisz a görbe a egy Rieman-levélen belül marad, míg

$$\int_{i,\,(G_2)}^{-i} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = [\mathrm{Log}(z)]_i^- i = \mathrm{Log}(e^{-i\frac{1}{2}\pi}) - \mathrm{Log}(e^{\frac{1}{2}\pi}) = -i\pi$$

mivel itt áthalad a görbe a következ? Riemann-levélre.

Más számítással:

$$\int_{i,\,(G_1)}^{-i} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{z(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-it} i e^{it} \mathrm{d}t = [it]_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

Trigonometikus függvények

$$\sin z =_{\mathrm{def}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos z =_{\mathrm{def}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Világos, hogy valós -re:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

A hiperbolikus függvényekhez hasonlóan a trigonometrikus függvények is el?állnak de a komplex exponenciális segítségével:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

5. Feladat. Igazoljuk, hogy fennáll

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

6. Feladat. Oldjuk meg az

$$\sin 4z = 0$$

egyenletet!

Hiperbolikus függvények

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$
$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

7. Feladat. Határozzuk meg az w = sh(iz) függvény valós és képzetes részét!

Mo.

$$\operatorname{sh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

8. Feladat. G az egységkör. Számítsuk ki

$$\int_{(G)} \frac{e^{z}}{z} \mathrm{d}z$$
$$\int_{(G)} \frac{\sin(z)}{z^4} \mathrm{d}z$$

Mo.

$$\int_{(G)} \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{2}z + \ldots \mathrm{d}z \ = 2\pi i$$
$$\int_{(G)} \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4!}z + \ldots \mathrm{d}z \ = -\pi i$$

Taylor-sor

A Cauchy-féle integrálformula következménye a következ? tétel, mely a komplex differenciálelmélet egyik megjellegzetesebb eredménye:

Tétel. Ha az *f*: **C** $\supset\!\!\!\longrightarrow$ **C** függvény az értelmezési tartománya egy z_0 pontjában és ennek egy nyílt környezetében komplex differenciálható (azaz z_0-ban *reguláris*), akkor *f* a z_0 pont egy *V* = B (z_0) környezetén mindenhol végtelenszer differenciálható, *V* minden pontjában az *f* z_0-beli Taylor-sora konvergens és ennek határfüggvénye *V*-n el?állítja *f*-et:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

(azaz *f analitikus* z_0-ban).

A tétel tehét azt mondja ki, hogy "http://wiki.math.bme.hureguláris függvény analitikus"http://wiki.math.bme.hu.

Megjegyezzük, hogy 1. mint minden nemnegatív egész hatványokat tartalmazó hatványsor, a Taylor-sor is egy körlap belsején abszolút konvergens, mely körlap sugara a konvergenciasugára, mely

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

ahol a sor a $\sum a_n(z-z_0)^n$, a körlap középpontja z_0, és ahol a reciprok kivételesen úgy értend?, hogy 1/0 =   , 1/   = 0.

2. A legyakrabban használt Taylor-sorok a következ?k:

$$|z|<1\text{−re}: \qquad \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$|z|<\infty\text{−re}: \qquad e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

$$|z|<\infty\text{−re}: \qquad \sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

$$|z|<\infty\text{−re}: \qquad \cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

$$|z|<\infty\text{−re}: \qquad \mathrm{sh}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

$$|z|<\infty\text{−re}: \qquad \mathrm{ch}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}$$

$$|z| < 1\text{–re}: \qquad \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

természetesen az utolsónál a z=1 pont 1 sugarú nyílt környezetében értelmezett logaritmusról van szó.

3. Mint minden hatványsor ez is egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez, így tagonként deriválható és integrálható.

Egész kitev?j? hatványsorok, Laurent-sor

Definíció. Ha adott *a* számra és $(c_n)_{n \ \mathbf{Z}}$ komplex számok komplex számokra a

$$\sum_{(-\infty)} (c_n(id - a)^n)$$

függvénysort egész kitev?j? hatványsornak, vagy Laurent-sornak nevezzük. Egy ilyen sor összegfüggvénye:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

Ugyanúgy, ahogy minden nemnegatív kitev?j? hatványsor egyenl? a saját Taylor-sorával, így az ilyen sorokat egyszer?en csak Laurent-sornak hívjuk, függetelenül attól, hogy a Laurent-sor együtthatóit egy függvény értékeib?l számoljuk ki.

Ahogy a Taylor-sorfejtésben nagyon hasznos a mértani sor összegképlete (és konvergenciafeltétele), úgy ez a Laurent-soroknál is jól alkalmazható:

Példa. Mely pontok körül fejthet? egész kötev?j? hatványsorba a

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

függvény és mik a konvergenciatartományok? *Megoldás.*

1) z ≠ 0-ra reguláris, így minden $z_0 \neq 0$-ra Taylor-sorba fejthet? legalább is a z_0 egy olyan környzetében, mely a 0-t mint szingularitást nem tartalmazza (hisz tudjuk: hatványsor konvergenciatartománya körlap). Ez a sor:

$$\frac{1}{z - z_0 + z_0} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{z - z_0 + 1} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - (-1)(z - z_0)} =$$

$$= \frac{1}{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0} (z - z_0)^n$$

A sugara 1, hisz $|(-1)||z-z_0|<1$ kell, ami ugyanaz, mint $|z-z_0|<1$. Persze, ha $|z_0| < 1$, akkor a sugár, maga a $|z_0|$, hisz a 0-t nem állítja el? a sor.

2) $z_0 \neq 0$-ra a Laurent-sora. Most a $z - z_0$-nak a mértani sorrá alakítás után a nevez?be kell kerülnie:

$$\frac{1}{z - z_0 + z_0} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-z_0}{z - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z_0^n}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{-\infty} (-1)^{-n} z_0^{-n} (z - z_0)^n$$

Ennek a sorfejtésnek akkor van jelent?sége, amikor olyan pont körüli sorral akarunk egy z számot el?állítani, melynek minden z-t tartalmazó gömbi környzete tartalmazza a 0-t is.

Konvergenciaköre a

$$|z - z_0| > |z_0|$$

egyenl?tlenségnek eleget tév? z-k.

3) z = 0-ban is van Laurent-sora, éspedig önmaga:

$$f(z) = ... + 0 + \frac{1}{z} + 0 + ...$$

Ennek a sugarai R_=0, mert a (...0,0,1) sorozat n-edik gyökeinek limszupja 0, és R_=+ , mert a (0,0,0,0,0,...) sorozat n-edik gyökeinek limszupja 0 és "http://wiki.math.bme.hureciproka"http://wiki.math.bme.hu + végtelen. (Ez egyben a körüli Laurent-sor, melynek csak reguláris része van.)

Konvergenciatartomány

Laurent-sornál a konvergenciatartomány egy körgy?r?, melynek sugarait az együtthatókból a Cauchy--Hadamard-tételhez hasonló módon számolható, éspedig:

$$R_+ = \frac{1}{\limsup\limits_{n>0} \sqrt[n]{|c_n|}}$$
$$R_- = \limsup_{n<0} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Ez a kijelentés könnyen igazolható a Cauchy-féle gyökkritériummal, s?t a Cauchy--Hadamard-tétel bizonyítását felidézve szinte magától értet?dik.

Reguláris- és f?rész

A Laurent-sor

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

részét a sor **f?részének,** a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

részét a sor **reguláris** részének nevezzük.

Laurent-sorfejtés

Tétel. -- A Laurent-sor tétele -- Ha az *f*: **C** $\supset\!\!\to$ **C** és *a* **C** szám és 0 ? r < R ? + olyan sugarak, hogy *f* az

$$T=\{z\in \mathbf{C}\mid r<|z-a|<R\}$$

nyílt körgy?r?ben reguláris, akkor egyértelm?en léteznek olyan $(c_n)_n$ **Z** komplex számok, éspedig tetsz?leges a *T*-ben haladó az a-t egyszer pozitív irányban körbehurkoló *G* görbére:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_G \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w,\qquad n\in \mathbf{Z}$$

hogy a

$$\sum_{(-\infty)} (c_n(id-a)^n)$$

függvénysor konvergens *T*-ben és minden *z* *T* számra:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

Bizonyítás. *f*-et most nem tudjuk el?állítani a Cauchy-integrálformulával, mint a Taylor-sor esetén, mert az *a* pontban esetleg a függvény nem reguláris. De el?állíthatjuk két hasonló formula különbségeként.

Rögzítsük egy tetsz?legesen választott *z* *T*-t. Legyenek k_1 és k_2 két *a* középpontú, *T*-ben haladó, pozitívan irányított kör, úgy, hogy *z* a k_1 és k_2 körök közötti nyílt tartományba essen. Ezekb?l a körökb?l és az ?ket elválasztó gy?r?t sugárirányban befelé átmetsz? s szakaszból elkészítünk egy olyan zárt görbét, melyre már alkalmazható az integrálformula. Tekintsük úgy, hogy k_1 kezd? és végpontja az *s* kezd?pontja, k_2 kezd? és végpontja pedig az *s* végpontja. Legyen

$$\Gamma=k_1^\frown s^\frown(-k_2)^\frown(-s)$$

itt (-s) az *s*-sel ellenkez? irányítású szakaszt jelzi. Ekkor a *z*-t egy reguláris tartományban hurkolja egyszer, pozitívan körbe, így a Cauchy-integrálformulával:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)}\mathrm{d}w$$

Node, ebben az integálban az s íven kétszer oda-vissza végezzük el az integrálást, így az erre vett integrál elt?nik. Másrészt a $(-k_2)$-n vett integrál ellenkez?je a 'k_2-*vettének, így végülis:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{k_1}\frac{f(w)}{(w-z)}\mathrm{d}w-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{k_2}\frac{f(w)}{(w-z)}\mathrm{d}w$$

Hangsúlyozzuk, hogy *z* és *a* most konstansok, így a

$$w\mapsto\frac{1}{w-z}$$

az értelmezési tartományán analitikus függvény. Ennek -- szikásos módon a mértani sor összegére vonatkozó képlet segítségével -- elvégezhetjük az *a* középpontú, valamilyen körön belüli hatványsorba fejtését. Természetesen a |w-a| < |z-a| feltételt meg kell követelnünk, hiszen hatványsor konvergenciakörében nem lehet benne a *z* szakadási pont. Tegyük fel tehát, hogy |w-a| < |z-a|. Ekkor:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)+(a-z)}=\frac{1}{a-z}\cdot\frac{1}{\frac{w-a}{a-z}+1}=-\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}$$

Ezzel megvan a sorfejtés minden együtthatója, ugyanis $q=\frac{w-a}{z-a}$-ra kell alkalmazni a mértani sor formuláját:

$$\frac{1}{w-z}=-\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^n}\cdot(w-a)^n$$

1) Világos, hogy ezt a sorfejtést csak a k_2-re vonatkozó integrálban használhatjuk fel, mert ott lesz a q < 1 (ill. a w mindig közelebb a-hoz mint z-hez). Ezt az integrált tehát:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{k_2}\frac{f(w)}{(w-z)}\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{k_2}f(w)\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^n}\cdot(w-a)^n\mathrm{d}w=$$

az integrál felcserélhet? a szummával és a w-t?l független tagok kihozhatók az integrál elé, ezért

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint\limits_{k_2}f(w)\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\cdot(w-a)^n\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\oint\limits_{k_2}f(w)\cdot(w-a)^n\mathrm{d}w$$

Ekkor egy konvergens, negatív kitev?j? hatványsort kaptunk, melynek csak f?része van, de érdekes módon nem a középponttal és w-re, hanem a középponttal és z-ra. Ez pont a kívánt sorfejtés, melyet érdemes átindexelni úgy, hogy a szummázás -1-t?l induljon és - -ig menjen:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{k_2}\frac{f(w)}{(w-z)}\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\oint\limits_{k_2}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w\right)(z-a)^n$$

Már csak azt kell megmagyaráznunk, hogy a k_2 helyére most már minden olyan G görbére felírható, mely az *a*-t pozitívan öleli körbe egyszer és a regularitási tartományban halad. Valóban, a képletbeli integrál már független az 1/(w-z) sorfejtési szituációjától és minden olyan G görbére áttranszformálható melyek folytonosan áttranszformálható k_2-be. Ez a *T* körgy?r? összes a tételi állításban megadott görbéjére áll.

2) Most már az el?z? számolásból sejthet?, hogy a Laurent-sor reguláris része akkor jön ki, ha az 1/(w-z) reciprokfüggvényt a az *a* körül nem pozitív, hanem negatív kitev?j? hatványsorba, fejtjük -- mint az els? példában. Ezt a |w-a| > |z-a| feltétellel tehetjük csak meg, hisz ilyen sor konvergenciatartománya körgy?r? és a z szinguláris pontot nem tartalmazhatja:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)+(a-z)}=\frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$$

Ez a sor valóban akkor konvergens, ha |w-a| > |z-a|. Ezzel az el?z? pomt számolását elvégezve az f(z)-t el?állító Laurent-sor reguláris részét kapjuk. QED

Példa. Adjuk meg az

$$f(z)=\frac{z^2}{z+2i}$$

függvény azon 0 körüli Laurent-sorát, mely el?állítja az 1-et! Azt is adjuk meg, mely a -3-t állítja el?!

Megoldás. -2i szinguláris hely. Ha a=0, akkor a z=1-et a 0 körüli Taylor-sor állítja el?, mert |0-1| < |0 - (-2i)|. Persze ezt is a m.s-ral adjuk meg:

$$f(z)=\frac{z^2}{z+2i}=z^2\frac{1}{2i}\frac{1}{\frac{z}{2i}+1}=\frac{z^2}{2i}\frac{1}{1-\frac{iz}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{2^{n+1}}z^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^{n-3}}{2^{n-1}}z^n$$