Tartalomjegyzék

Hiányos másodrend? differenciálegyenlet

1. *y*-ban hiányos egyenlet $y''=f(x,y')$ alakú, azaz a p(x)=y' helyettesítéssel, p-ben els?rend?vé válik $p'=f(x,p)$

$$y'y''+\frac{1}{x}(y')^2=x^2y'$$

Mo.

$$pp'+\frac{1}{x}p^2=x^2p$$
$$p'+\frac{1}{x}p=x^2$$

Inhomogén lineáris. A homogén:

$$\ln p=-\ln x+C$$
$$p(x)=\frac{c}{x}$$

Partikuláris:

$$\frac{c'x-c}{x^2}+\frac{c}{x^2}=x^2$$
$c'=x^2$
$$c(x)=\frac{x^3}{3}$$
$$p=\frac{c}{x}+\frac{x^2}{3}$$
$$y=c_1\ln x+\frac{x^2}{9}+c_2$$

2. *x*-ben hiányos. Ekkor $y''=f(y,y')$ és y'=p(y) ahol így y' ' =pp'

$2yy''=y'^2$

Mo.

$$2ypp'=p^2$$

$$2yp' = p$$
$$2\ln p = \ln y + C$$
$$p(y) = cy^{\frac{1}{2}}$$
$$y' = cy^{\frac{1}{2}}$$

szep.

Állandóegyütthatós

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Homogén általános:

$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2}$, ha ≠ valós gyökök
$y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$, ha 1 = 1 = valós gyök
$y = C_1e^{ax}\sin(bx) + C_2e^{ax}\cos(bx)$, ha $a + bi$ ill. $a - bi$ nemvalós gyökök.

Ha

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\sin(\beta x) + P_2(x)\cos(\beta x))$$

akkor a partikuláris megoldás kereshet? az

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}(Q_1(x)\sin(\beta x) + Q_2(x)\cos(\beta x))$$

alakban, ahol k megmutatja, hogy az $\pm$ szám hányszoros gyöke a

$$\lambda^2 + a\lambda + b$$

karakterisztikus polinomnak és a Q-k olyan fokszámú meghatározandó polinomok, mint a P-közül a nagyobbik fokszámú.

3.

$$y'' - 4y' + 5y = \sin x$$

Mo.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = -1$$
$$(\lambda - 2)^2 = -1$$
$$\lambda = 2 \pm i$$

Hom. ált. mo.:

$$y = C_1e^{2x}\sin(x) + C_2e^{2x}\cos(x)$$

Inhom. part.

$$y = A\sin x + B\cos x$$

Laplace-transzformált

Legfontosabb képletek:

$$f(t) = e^{at} \quad \to \quad F(s) = \frac{1}{s-a}, \; f(t) = t^n \quad \to \quad F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}},$$
$$f(t) = e^{at}g(t) \quad \to \quad F(s) = G(s-a)$$
$$\sin(at) \quad \to \quad \frac{a}{s^2+a^2}, \; \cos(at) \quad \to \quad \frac{s}{s^2+a^2}$$
$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \; \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

4.

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

Mo.

$$s^2Y - 1 + 2sY + 2Y = 0$$
$$Y(s^2 + 2s + 2) = 0$$
$$Y = \frac{1}{s^2 + 2s + 1 + 1}$$
$$Y = \frac{1}{(s+1)^{+}1}$$
$$y = e^{-x}\sin x$$

5.

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x} \qquad y(0) = y'(0) = 3$$

Mo.

$$s^2Y - 3s - 3 - 3sY + 9 + 2Y = \frac{6}{s+1}$$
$$Y(s^2 - 3s + 2) = \frac{6}{s+1} + 3(s-2)$$
$$Y = \frac{6}{(s+1)(s-1)(s-2)} + \frac{s-2}{(s-1)(s-2)}$$
$$Y = \frac{6}{(s+1)(s-1)(s-2)} + \frac{1}{s-1}$$

Euler-típusú

6.

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x^3, \qquad y(2) = 2, y'(1) = 3$$

Mo. Célravezet az $x = e^z$ helyettesítés (most, azaz pozitív x-ekre):

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{5z}$$