Matematika A3a 2009

Ívhosszparaméter és görbület

A görbület adott pontban független a koordinátarendszer választásától. Ezt például az is mutatja, hogy egy általános paraméterezésben felírt értékén

$$G(t)=\frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

túl a koordinátarendszerfüggetlen ívhosszpraméterezésben is kifejezhet? a nagysága:

$$G(s)=|\mathbf{r}''(s)|$$

(**0. Feladat** Térjünk át az alábbi görbénél ívhosszparaméterezésre!

$$\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix}\cos^3 t\\ \sin^3 t\\ \cos 2t\end{bmatrix}$$ ahol $t\in[0,\pi/2]$)

Mo.

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=\begin{bmatrix}-3\cos^2 t\sin t\\ 3\sin^2\cos t\\ -2\sin 2t\end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t)^2=\sin^2 t\cos^2 t(9\cos^2 t+9\sin^2+4)$$

$$s(t)=\int_0^t\frac{\sqrt{13}}{2}|\sin 2t'|\,\mathrm{d}t'=\frac{\sqrt{13}}{4}(\cos(2t)-1)$$

$$t(s)=\frac{1}{2}\arccos(\frac{4}{13}s+1)$$

$$\mathbf{r}(s)=\begin{bmatrix}\cos^3\frac{1}{2}\arccos(\frac{4}{13}s+1)\\ \sin^3\frac{1}{2}\arccos(\frac{4}{13}s+1)\\ \cos 2\frac{1}{2}\arccos(\frac{4}{13}s+1)\end{bmatrix}$$ ahol $s\in[0,\frac{1}{2}\arccos(\frac{4\pi}{26}+1)]$

1. Feladat Térjünk át az alábbi görbénél ívhosszparaméterezésre és számítsuk ki a görbületét!

$$\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix}\cos t^2\\ \sin t^2\\ t^2\end{bmatrix}$$ ahol $t\in[0,\pi/2]$

Mo.

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=\begin{bmatrix}-2\sin(t)t\\ 2\cos(t)t\\ 2t\end{bmatrix}$$, $(\dot{\mathbf{r}}(t))^2=8t^2$

$$s(t)=\int_0^t \sqrt{8}t'\,\mathrm{d}t'=\frac{\sqrt{8}}{2}t^2,\quad t(s)=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{8}}}\sqrt{s}$$

$$\mathbf{r}(s)=\begin{bmatrix}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}s\\ \sin\frac{1}{\sqrt{2}}s\\ \frac{1}{\sqrt{2}}s\end{bmatrix},\quad \mathbf{r}'(s)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}s\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}s\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{r}''(s)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}s\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}s\\ 0\end{bmatrix}$$

2. Feladat

$$\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ bt\end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a görbesereg egy-egy görbéjének görbületét a *b* paraméter függvényében. Térjünk át ívhossz paraméterezésre!

Kísér? triéder

3. Feladat A *t* paraméter mely értékére párhuzamos az

$$\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}\\ 2e^{t}\\ t\end{bmatrix}$$

görbe simulósíkja az

$$5-x=1-y=-2z$$

egyenlet? egyenessel?

Mo.

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=\begin{bmatrix}2e^{2t}\\ 2e^{t}\\ 1\end{bmatrix},\quad \ddot{\mathbf{r}}(t)=\begin{bmatrix}4e^{2t}\\ 2e^{t}\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=\begin{bmatrix}2e^{2t}\\ 2e^{t}\\ 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4e^{2t}\\ 2e^{t}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2e^{2t}\\ 4e^{2t}\\ -4e^{3t}\end{bmatrix}$$

a simulósík normálvektora. Ez mer?leges a (1,1,1/2) --> (2,2,1)-re

$$-4e^{2t}+8e^{2t}-4e^{3t}=0$$
$$1-e^{t}=0,\quad t=0$$

4. Feladat Határozzuk meg az

$$x^2+y^2+z^2=3,\quad 2x+y=3$$

egyenletekkel megadott implicit megadású görbe kísér? triéderét a P=(1,1,1) pontban!

Mo.

$x^2 + (3 - 2x)^2 + z^2 = 3$
$z^2 = 3 - x^2 - (3 - 2x)^2$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 3-2t \\ \sqrt{3-x^2-(3-2x)^2} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \sqrt{3-x^2-(3-2x)^2} \end{bmatrix} \Big| = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$2zz' = -2x + 2(3-2x) = -4x+6, \quad z' = \frac{-4x+6}{2z}\Big| = 1$$

Felületek

5. Feladat. Paraméterezzük a z ill. az y tengely körül körbeforgatott $z = y^2$ parabola által kirajzolt felületet!

Mo. a) $x^2 + y^2 = z$

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} \sqrt{z}\cos u \\ \sqrt{z}\sin u \\ z \end{bmatrix}$$

b) $x^2 + z^2 = y^4$

$$\mathbf{r}(u,y) = \begin{bmatrix} y^2\cos u \\ y \\ y^2\sin u \end{bmatrix}$$

6. Feladat Mely pontokban párhuzamosak ill. mer?legesek az

$$\mathbf{r}(u,v) = (u^2+v^2)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + \cos u\cos v\mathbf{k}$$

felület pontbeli "http://wiki.math.bme.hukoordinátavonalai"http://wiki.math.bme.hu (az ∂**r**/∂u és ∂**r**/∂v vektorok)?

7. Feladat. Mely pontokban párhuzamos az xyz=1 egyenlet? felület érint?síkja az x+y+z=5 síkkal?