

Tartalomjegyzék

- 1 Szeparábilis differenciálegyenlet
- 2 Homogén fokszámú egyenlet
- 3 Cauchy-típusú integrálok
- 4 Reziduumszámítás
- 5 Laurent-sorfejtés

Szeparábilis differenciálegyenlet

0. a)

$$y' = \frac{x \sin(1 + x^2)}{y^4}$$

b)

$$y' = \sqrt[3]{y}, y(0) = 0$$

Mo. a)

b) $y = 0$ és $y = (2/3)x^{3/2}$

1. Oldjuk meg az

$$y' = x^2 \frac{\cos^4 y}{\sin y}$$

egyenletet az

a) $y(0) = -\frac{\pi}{2}$
 b) $y(0) = \frac{\pi}{4}$
 c) $y(0) = \frac{\pi}{4} + 2\pi$

Mo. a) Ez egykonstans megoldás és nincs másik a $(0, \pi/2)$ -n áthaladó, mert az y szerinti parciális derivált korlátos.

b) Az általános megoldásból keressük a kezdeti feltételt kielégítő megoldást:

$$\frac{\sin y}{\cos^4 y} y' = x^2$$

$$-\cos^{-4} y (-\sin y) y' = x^2$$

$$\frac{1}{3} \cos^{-3} y = \frac{1}{3} x^3 + C$$

Az implicit egyenlet:

$$\cos^{-3} y = x^3 + 3C$$

Ha $x=0$ és $y = \sqrt{2}/4$, akkor

$$3C = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3}$$

és

$$y(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + \frac{24}{(\sqrt{2})^3}}}$$

c) ugyanez + 2

HF. Oldjuk meg az $y' = \sin(x) \ln(y)$ egyenletet az

- a) $y(0)=1$,
- b) $y(0)=e$

kezdeti feltételek mellett!

Homogén fokszámú egyenlet

Azt mondjuk, hogy az $y' = F(x,y)$ egyenlet homogén fokszámú, ha

$$F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$$

A homogén fokszámú egyenlet megoldása visszavezethető a szeparálásra az

$$u = \frac{y}{x}$$

új változó bevezetésével, ahol $u = u(x)$ az ismeretlen függvény. Ekkor

$$(xu)' = u + xu' = y'$$

azaz

$$y' = u'x + u$$

2. Oldjuk meg az

$$y'xy = x^2 + y^2$$

Szeparábilis differenciálegyenlet

egyenletet!

Mo. Az új változóra történő áttérésnél az y^2 -nak már nem szabad szerepelnie az egyenletben, ezért, hogy ne féljen egyedül, szorozzuk be az egyenletet $1/x^2$ -tel:

$$\begin{aligned} y' \frac{y}{x} &= 1 + \frac{y^2}{x^2} \\ (u'x + u)u &= 1 + u^2 \\ u'ux &= 1 \\ u'u &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ezt kell megoldani. Egyelőre tegyük fel, hogy $y(x)$ függvény nem veheti fel a nullát, így az u sem. Ekkor szeparálással:

$$\frac{u^2}{2} = \ln |x| + C$$

Az egzisztencia és unicitás diszkussziója. a szeparálással kapott általános megoldás minden $\mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}$ -beli kezdeti értékre egyértelmű megoldást ad.

Ha $x_0=0$, akkor $y_0=0$ kell, hogy legyen ellenkező esetben nincs megoldás. De ekkor is irreguláris a megoldás, mert két megoldás is kielégíti ott az egyenletet.

HF. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} \text{a) } y'x &= y + \sqrt{x^2 + y^2} \text{ és az} \\ \text{b) } y' &= \frac{2x + y}{2y + x} \end{aligned}$$

egyenletet!

Cauchy-típusú integrálok

3.

$$\int \frac{1}{z^2(z^2 - 6z + 8)} dz = ?$$

a) $|z|=3$
b) Osztályozzuk az integrandus szakadási helyeket
c) Adjuk meg ezekben a pontokban a reziduumokat!

Mo. a)

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 - 6z + 8)} = \frac{1}{z^2(z - 2)(z - 4)}$$

A nevező gyökhelyein lesz irreguláris f , de ezek közül csak a $|z|=3$ kör által körülhurokolt $z=0$ és $z=2$ helyekkel kell foglalkoznunk, melyk köré egy-egy mondjuk 1 sugarú (vagy elegendően kicsiny sugarú)

Homogén fokszámú egyenlet

kört vonunk, és használjuk az integrál additivitását:

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2(z-2)(z-4)} dz = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z^2-6z+8}}{z^2} dz + \int_{|z-2|=1} \frac{\frac{1}{z^2(z-4)}}{z-2} dz = *$$

Az első tagnál az $n=1$ -re vonatkozó, a másodiknál az $n=0$ -re vonatkozó Cauchy-formulát kell alkalmaznunk. Ezek:

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{g(z)}{z-z_0} dz$$

és

$$h'(z_1) = \frac{1!}{2\pi i} \int_{|z-z_1|=r} \frac{h(z)}{(z-z_1)^2} dz$$

A feladatban $z_0 = 2$, $g(z) = 1/z^2(z-4)$ illetve

$$g(z_0) = \frac{1}{z^2(z-4)} \Big|_{z=z_0=2} = -\frac{1}{16}$$

és $z_1 = 0$,

$$h(z) = \frac{1}{z^2-6z+8}, \quad h'(z_1) = \frac{-2z+6}{((z-2)(z-4))^2} \Big|_{z=z_1=0} = \frac{6}{64}$$

Tehát

$$* = -2\pi i \frac{1}{16} + 2\pi i \frac{3}{32} = \frac{\pi i}{16}$$

b) 2 és 4 elsőrendű pólus, 0 másodrendű.

c) 0-ban és 2-ben az integrál 2. i-vel elosztott értéke a reziduum, 4-ben most nem számoljuk ki, de a 2-höz hasonlóan kell eljárni.

HF. Számítsa ki az

$$\int \frac{\operatorname{ch} 3z}{z^3 - z^2} dz$$

a) $|z+1|+|z-1|=4$

(a görbe egy pozitívan irányított 0 középpontú ellipszis) és a

$$\int \frac{1-e^{2z}}{z^{100}} dz$$

b) $|z|=1$

Cauchy-típusú integrálok

integrálokat!

- c) Milyen szakadások vannak $z=0$ -ban?
 d) Adja meg a reziduumokat a $z=0$ -ban!

Reziduumszámítás

4. Számítsuk ki az alábbi függvények 0-beli reziduumát, egységkörön vett integrálját és a szakadás jellegét!

a) $\frac{1}{z} \operatorname{sh}^2 z$

b) $z \operatorname{sh}^2 \frac{2}{z}$

c) $\frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z}$

Mo. a) reguláris, mert 0-ban egy nevezetes határértékkel egyenlő. Res = 0, integrál = 0.

b)

$$\begin{aligned} z \operatorname{sh}^2 \frac{2}{z} &= z \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{3!} \frac{8}{z^3} + \dots \right) \times \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{3!} \frac{8}{z^3} + \dots \right) = \\ &= z \left(\frac{4}{z^2} + \frac{32}{3!} \frac{1}{z^4} + \dots \right) = \frac{4}{z} + \frac{32}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

Innen Res = 4, int = 8 i. A szakadás lényeges.

c) Ennek a függvénynek a 0-ban harmadfokú pólusa van mert $z^3 f(z)$ már reguláris. Ez a Riemann-tétel miatt van és mert $\lim_{0 \rightarrow z} z^3 f(z) = 1$

$$\frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z} = c_{-3} \frac{1}{z^3} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 + \dots$$

ahol az előbb kiszámoltuk, hogy $c_{-3}=1$

$$\begin{aligned} 1 &= \dots + 0 + 1 + 0 + \dots = \left(z^3 + \frac{1}{3!} z^5 + \frac{1}{5!} z^7 + \dots \right) \left(\frac{1}{z^3} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 + \dots \right) = \\ &= 1 + c_{-2} z + \left(c_{-1} + \frac{1}{6} \right) z^2 + \dots \end{aligned}$$

innen $c_{-1} = -1/6$, int = - i/3

HF. Határozzuk meg a

a) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \sin \frac{1}{z}$

b) $g(z) = \frac{\cos z}{\sin^2 z}$

$$\begin{aligned} \text{c) } h(z) &= \frac{e^z - 1}{\sin z} \\ \text{d) } r(z) &= \frac{1}{\sin 2z} \end{aligned}$$

függvények 0-beli reziduumát, egységkörön vett integrálját és szakadásának jellegét!

Laurent-sorfejtés

5. Határozzuk meg az

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

nulla körüli Laurent-sorait!

Mo.

$$f(z) = c \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3} \right) = -\frac{1}{2} \frac{z-3 - z+1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3} \right)$$

alkalmas tehát a $c=-1/2$.

Ha $|z|<1$, akkor

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n$$

Ha $|z|>1$, akkor

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}$$

A másik tag:

Ha $|z/3|<1$, azaz $|z|<3$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+1}} z^n$$

Ha $|z|>3$, akkor

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{-n-1}$$

Tehát a Laurent-sorok:

$|z|<1$ esetén reguláris:

Laurent-sorfejtés

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} -z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right) z^n$$

$1 < |z| < 3$ esetén vegyes:

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \begin{cases} z^n, & n < 0 \\ \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right) z^n, & n \geq 0 \end{cases}$$

$|z| > 3$ esetén csak f?rész:

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2} (1 - 3^{-n-1}) z^n$$

HF Fejtsük sorba a 0 körül az

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$

f?ggvényt!