

Tartalomjegyzék

- 1 Definíció
- 2 Egzisztencia- és unicitástétel
- 3 Az egzaktság jellemzése
- 4 Példa
- 5 Integráló tényez?
- 6 Példa

Definíció

Legyen $U \subset \mathbf{R}^2$ nyílt halmaz és $P, Q: U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos függvények, Q sehol sem nulla. Azt mondjuk, hogy az

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (\text{EX})$$

differenciálegyenlet *egzakt*, ha létezik olyan $F: U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad (\text{C})$$

Példa. Minden

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (f \in C(I), g \in C(J), 0 \notin \text{Ran}(g))$$

alakú szeparábilis differenciálegyenlet egzakt, hiszen ha g integrálfüggvénye G , akkor

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad G(y) = F(x) + C$$

Alkalmas tehát az alábbi függvény:

$$\Phi(x, y) := G(y) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g$$

Jelen esetben a G függvény deriváltja ($G'=g$) sehol sem nulla folytonos függvény, ezért szigorúan monoton. Emiatt kifejezhető y éspedig:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Megjegyzés. A megoldásokat implicit módon adja meg az

$$\Phi(x, y) = C$$

egyenlet. Mivel

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$$

ezért az implicitfüggvény-tétel miatt, hogy y -t "http://wiki.math.bme.huki lehet fejteni" http://wiki.math.bme.hu. Érdemes felelevenítenünk magát az implicitfüggvény-tételt:

Implicitfüggvény-tétel -- Ha $a : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény az $(x_0, y_0) \in \text{int}(I \times J)$ pontban teljesíti a $\partial / \partial y \neq 0$ feltételt és $(x_0, y_0) = 0$, akkor a $(x, y) = 0$ egyenletnek van az (x_0, y_0) ponton áthaladó implicit függvénye és ennek deriváltja:

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} \Big|_{(x, y(x))}$$

Egzisztencia- és unicitástétel

Tétel. Legyenek P és Q az $U \subset \mathbf{R}^2$ nyílt halmazon értelmezett folytonos valós függvények, Q sehol se nulla, $\text{grad } F = (P, Q)$ valamely $F : U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvénnyel és $(x_0, y_0) \in U$. Ekkor

1) az

$$(ex) \ y' = -P/Q$$

egyenletnek egyértelműen létezik az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti feltételt kielégítő y megoldása és

2) az

$$(impl) \ F(x, y) = F(x_0, y_0)$$

egyenlet (x_0, y_0) -on áthaladó egyetlen implicit függvénye az (ex) egyenlet $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő egyetlen megoldása.

Biz. 1) Egzisztencia. Belátjuk, hogy (impl) egyetlen (x_0, y_0) -on áthaladó implicit függvénye megoldása az (ex) egyenletnek.

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = Q(x_0, y_0) \neq 0$$

így az implicitfüggvény-tétel szerint, egyértelműen létezik F -nek $y=y(x)$ implicit függvénye az adott pont egy környezetében és ennek deriváltja az értelmezési tartományának minden pontjában:

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = - \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

tehát y az (ex) differenciálegyenletnek is megoldása, és ez kielégíti a kezdeti feltételt.

Unicitás. Tegyük fel, hogy létezik megoldása a kezdeti érték feladatnak. Legyen egy tetszőleges megoldása y , azaz

$$y'(x) = -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

Ez az egyenlet a $\text{grad } F = (P, Q)$ miatt előáll

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

alakban. Most belátjuk, hogy y (impl)-nek implicit megoldása. Az összetett függvény differenciálási szabálya miatt $(d(F \circ G)(x, y) = dF(G(x, y)) \circ dG(x, y))$ az előző egyenlet a következő formában is írható:

$$(F(x, y(x)))' = [\text{grad } F|_{(x, y(x))}] \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y'(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(x, y(x))} + y' \frac{\partial F}{\partial y}|_{(x, y(x))} \equiv 0$$

x értékei egy intervallumból kerülnek ki, ezért az *integrálszámítás alaptétele* szerint az $x \mapsto F(x, y(x))$ egy konstans függvény. De a feltétel szerint $y(x_0) = y_0$ teljesül, ezért $x \mapsto y(x)$ egy (x_0, y_0) -on áthaladó implicit függvénye az $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ egyenletnek. Ez az utóbbi azonban egyértelműen van meghatározva, ezért a kezdeti érték feladat minden megoldása egybeesik ezzel az implicit függvénnyel, azaz a megoldás egyértelmű.

2) Az implicitfüggvény tételében adott egyetlen implicit függvény az 1) egzisztencia része miatt megoldása (ex)-nek és 1) unicitás része miatt ez az egyetlen megoldása (ex)-nek.

Az egzaktság jellemzése

Megjegyzés. Az egzakt differenciálegyenletet még

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \text{ ill. } P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

alakban is szokás írni.

Ez utóbbi egyenletről azt is mondják, hogy akkor egzakt, ha a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ kifejezés

"[http://wiki.math.bme.hu/teljes differenciál](http://wiki.math.bme.hu/teljes_differencial)" <http://wiki.math.bme.hu>, amin azt értik, hogy létezik olyan $F(x, y)$ függvény, melynek teljes differenciálja:

$$dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Ezt a mai jelölésekkel a következőképpen írjuk. Egy F kétváltozós függvény teljes differenciálja egy lineáris leképezés, mely a sztenderd $\{(1, 0), (0, 1)\}$ bázisban felírt koordinátáival nem más, mint a parciális deriváltjainak sormátrixa:

$$[dF(x, y)] = \text{grad } F(x, y) = \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right]$$

Emiatt a (C) feltétel a következő alakban is írható:

$$[dF] = [P, Q] \text{ ill. } \text{grad } F = [P, Q]$$

Tehát az egzakt egyenletben a (P, Q) vektormez? (vektorérték? függvény) **potenciális**. Innen hasznos jellemzést kapunk az egzaktságra a vektoranalízisbeli ismereteinkb?l.

Tétel. Legyen U egyszeresen összefügg? nyílt halmaz, $P, Q: U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvények (Q sehol sem nulla). A $Pdx + Qdy = 0$ egyenlet pontosan akkor egzakt, ha

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Az F függvényt, az $Pdx + Qdy = 0$ egyenlet integráljának nevezzük.

Ezt a tételt jól ismerjük és a bizonyítást a vektoranalízisben vettük.

Megjegyzés. 1) A feltétel nem más, mint az, hogy a (P, Q) síkbeli vektormez? rotációja azonosan nulla. Ugyanis a rotáció a síkbeli (P, Q) vektormez? esetén:

$$\text{rot}(P, Q) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

2) Bár a szeparábilis egyenlet egzakt, a fenti feltétel az egzaktság ellen?rzésére sokkal szigorúbb mint a szeparábilis egyenlet megoldhatóságának feltétele.

Példa

Oldjuk meg az

$$(ye^{xy} + \cos x) dx + (xe^{xy} + \text{ch } y) dy = 0$$

differenciálegyenletet!

Mo.

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

Tehát egzakt. Az egyenlet első integrálját megkapjuk, ha megoldjuk az

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + \cos x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + \text{ch } y$$

parciális differenciálegyenlet-rendszert.

Az első egyenletből:

$$F(x, y) = e^{xy} + \sin x + C(y)$$

A második egyenlet miatt:

Az egzaktság jellemzése

$$xe^{xy} + C'(y) = xe^{xy} + \operatorname{ch} y$$

azaz

$$C'(y) = \operatorname{ch} y$$

Innen a $C(y)$ -ra egy partikuláris megoldás:

$$C(y) = \operatorname{sh} y$$

Azaz

$$F(x, y) = e^{xy} + \sin x + \operatorname{sh} y$$

Ez valóban teljesíti a $\operatorname{grad} F = [P, Q]$ feltételt, így az első integrál:

$$e^{xy} + \sin x + \operatorname{sh} y = C$$

Integráló tényez?

Általában egy $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ alakú differenciálegyenlet esetén nem teljesül a $\operatorname{rot}(P, Q) = 0$ feltétel. Esetenként azonban található olyan μ kétváltozós pozitív érték függvény, amellyel:

$$\mu(x, y)P(x, y) + y'\mu(x, y)Q(x, y) = 0$$

már egzakt egyenlet. Vizsgáljuk meg miből nyerhetjük az ilyen μ un. **integráló szorzót!** A $\operatorname{rot}(\mu P, \mu Q) = 0$ feltétel a következő:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu P}{\partial y} &= \frac{\partial \mu Q}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} \end{aligned}$$

Ezt a parciális differenciálegyenletet kell megoldanunk ahhoz, hogy legyen integráló tényezőnk.

Példa. Keressünk integráló tényezőt az

$$y' + f(x)y = g(x)$$

közönséges elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlethez!

Világos, hogy nem egzakt, mert a

$$dy - (g(x) - f(x)y) dx = 0$$

alakban a keresztben vett deriváltak: 0 és $f(x)$.

Példa

$Q=1$ és $P(x,y)=-g(x)+f(x)y$ ezért a μ -t adó parc.diff. egyenlet:

$$\mu f = \frac{\partial \mu}{\partial x} - (g(x) - f(x)y) \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

Elegendő egy partikuláris megoldást találni, amit egyszerre megkapunk, ha csak az olyan μ -ket keressük, amik csak az x -től függenek, ekkor ugyanis pl. $g(x)$ nem is lesz az egyenletben. Ilyet találunk, mert:

$$\begin{aligned} \mu f &= \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \mu f(x) &= \mu' \end{aligned}$$

Ez egy szeparábilis, aminek a megoldása:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mu'}{\mu} \\ f(x) &= (\ln \mu)' \end{aligned}$$

egy partikuláris megoldás:

$$\mu(x) = e^{F(x)}$$

ahol $F'=f$.

HF: Keressük meg ezzel az integráló szorzóval az általános megoldást!

Mo.

$$e^{F(x)} dy + (-g(x) + f(x)y) e^{F(x)} dx = 0$$

Már egzakt, hiszen

$$e^{F(x)} f(x) = f(x) e^{F(x)}$$

Ekkor

$$\Phi(x, y) = ye^{F(x)} + C(x), \quad \Phi(x, y) = ye^{F(x)} + \int -g(x) e^{F(x)} dx + C(y)$$

$$C = ye^{F(x)} - \int g(x) e^{F(x)} dx$$

azaz

Példa

Tanulásképpen megállapíthatjuk, hogy néha érdemes a μ -re felírt egyenletnek csak olyan megoldásait keresni, amelyek csak az egyik változótól függenek. Ha ugyanis csak a $\mu=\mu(x)$ alakú integráló szorzókra szorítkozunk, akkor a megoldandó egyenlet:

Integráló tényez?

$$\mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

azaz

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$R(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} \quad \mu(x) = e^{\int R(x) dx}$$

Az ilyen alak feltétele tehát az, hogy a

$$\frac{-\text{rot}(P, Q)}{Q}$$

csak x-től függjön (vagy a $-\text{rot}(P, Q)/P$ csak y-tól és akkor μ csak y-tól függ).

Példa. Oldjuk meg az

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

egyenletet!

Mo. Átrendezve:

$$(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0$$

$\partial_y P = 3y^2$, $\partial_x Q = -y^2$, azaz

$$\frac{-\text{rot}(P, Q)(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{3y^2 + y^2}{-xy^2} = \frac{-4}{x}$$

azaz célravezet, ha μ -t $\mu(x)$ alakban keressük. Ekkor

$$\mu(x) = \frac{1}{x^4}$$

Ekkor az egyenlet:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^3}{x^4} \right) dx - \frac{y^2}{x^3} dy = 0$$

egzakt, mert

Példa

$$\frac{3y^2}{x^4} - (-1)\frac{-3y^2}{x^4} = 0$$

Integrálássa:

$$F(x, y) = \ln|x| + \frac{1}{-3} \frac{y^3}{x^3} + C(y), \quad F(x, y) = -\frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} + C(x)$$

azaz

$$\begin{aligned} \ln|x| - \frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} &= C \\ 3x^3 \ln c|x| &= y^3 \\ x \sqrt[3]{3 \ln c|x|} &= y(x) \end{aligned}$$