

Tartalomjegyzék

- 1 Lineáris kombináció és geometria
- 2 Vektorokkal felírt háromszög egyenlőtlenség
- 3 Lineáris függetlenség
- 4 HF

Lineáris kombináció és geometria

Lineáris kombinációnak nevezzük a

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n$$

alakú kifejezéseket, ahol a λ -k számok, az $\mathbf{a}$ -k vektorok.

Tétel.

1. Ha $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ két nem párhuzamos vektor a síkban, akkor a sík minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2$$
2. Ha $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ három, nem egy síkban lévő vektor, akkor a tér minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{b}_3$$

Síkban két nem párhuzamos vektor halmazát, térben három nem egy síkban lévő vektor halmazát *bázis*nak nevezünk. Ha ezek egység-hosszúságúak és páronként merőlegesen egymásra, akkor *ortonormált* bázist alkotnak. A *jobbsodrású* (v.ö.: jobbszvszabály) ortonormált bázis a térben az $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Egy $\mathbf{v}$ térvektornak $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázisra vonatkozó *koordinátareprezentációja* az az oszlop mátrix, melynek elemei rendre az előző tételbeli egyértelműen létező λ -k:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

1. (4.4) Tekintsük az ABCDEF szabályos hatszöget és legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az OA és OB vektorok. Fejezzük ki az AB, BC, CD, ... vektorokat az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként.
2. (4.38) Legyen ABCDAA₁B₁C₁D₁ egy paralelepipedon. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AA_1}$, F a BCC₁B₁ lap középpontja, H a BD₁ testátló D₁-hez közelebbi negyedelőpontja, K a D₁C₁ él felezéspontja, S az FHK súlypontja. Mik az idevezető vektorok A-ból $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ -val kifejezve?
3. (4.14) Szabályos n szög köréírható körének O középpontjából mutassanak vektorok a csúcsokig. Igazoljuk, hogy ezek összege 0.

Vektorokkal felírt háromszög egyenlőtlenség

4. (4.7.) Igazoljuk, hogy három vektor akkor és csak akkor lehetnek egy (esetleg elfajuló) háromszög oldalvektora, ha vagy nulla az összegük, vagy az egyik a másik kettő összegeként áll elő.

5. (4.20) Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalával szerkeszthet? háromszög.

Lineáris függetlenség

6. (4.3) Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ lineárisan független vektorok. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathbf{m}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{n}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ is lineárisan független. Fejezzük ki $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ segítségével a) $4\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ b) $5\mathbf{a}+2\mathbf{b}$

7. (4.36)

8. (4.37)

HF

4.1, 24, 27, 31, 42