Taylor-sor

Sorbafejthet? (analitikus) függvény esetén a függvény el?áll a következ? sor alakjában:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n$$

Nevezetes sorok:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

1. Feladat. *u=0*

a) $f(z) = \dfrac{z}{2-z}$

b) $f(z) = z^4 - 2z^3 + 2$, *u=1.*

c) $f(z) = \mathrm{ch}(z) := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

Mo.

a)

$$f'(z) = \frac{2-z-(-z)}{(2-z)^2} = \frac{2}{(2-z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{-2(2-z)}{(2-z)^4} = \frac{-2}{(2-z)^3}$$
$$f^{(3)}(z) = \frac{+2\cdot 3(2-z)^2}{(2-z)^6} = \frac{2\cdot 3}{(2-4)^4}$$
$$f^{(4)}(z) = \frac{-2\cdot 3\cdot 4\cdot (2-z)^3}{(2-z)^8} = \frac{-2\cdot 3\cdot 4}{(2-z)^5}$$
$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(2-z)^{n+1}}$$

így a Taylor-sor: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

b) $f(z) = z^4 - 2z^3 + 2$
$f'(z) = 4z^3 - 2 \cdot 3z^2$ ---- 2
$f''(z) = 4 \cdot 3z^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3z$ ----
$f^{(4)}(z) = 4 \cdot 3 \cdot 2z - 2 \cdot 2 \cdot 3$
$f^{(5)}(z) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Fourier-sor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

ahol: a_0="http://wiki.math.bme.huátlag"http://wiki.math.bme.hu, b_0=0, L="http://wiki.math.bme.hufélperiódus"http://wiki.math.bme.hu

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{n=0}^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{n=0}^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

2. Feladat.

f(x)=x (- ,\pi]

Mo.

$$a_0 = 0, b_0 = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} x \cos nx \, \mathrm{d}x$$

...

Komplex differenciálhatóság

Cauchy--Riemann-egyenletek:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Polárkoordinátákban:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

3. Feladat. Hol diffható és mi a deriváltja?

a) $f(z) = z\overline{z}$
b) $f(z) = lnx$

Mo.

a) $f(x,y) = (x + iy)(y - iy) = x^2 + y^2 + 0.i$

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát csak a (0,0)-ban teljesül C--R. Itt a definíció szerint látjuk be:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0}$$

b)

polárkoordinátás alakban:

$$\ln(z) = \ln r + i\varphi + ik\pi$$