Tartalomjegyzék

Matematika verseny 2011

A 2011. évi BME Matematika versenyt 2011. április 14-én rendezték meg. A verseny általános leírását lásd a Matematika verseny lapon, a feladatsort és eredményeket Horváth Miklós honlapján.

Ez a lap a feladatokat tartalmazza, de ide (vagy allapokra) lehet írni a feladatok megoldását vagy megjegyzéseket hozzájuk.

1. feladat

Adott a,b,c,d oldalhosszúságú síkbeli négyszögek közül melyik lesz maximális terület?? Az oldalak ebben a sorrendben csatlakoznak.

2. feladat

Melyek azok a tízes számrendszerben felírt természetes számok, melyek utolsó számjegyét az elejére áthelyezve az eredeti szám 2/3-át kapjuk?

3. feladat

Legyen A invertálható $n \times n$ -es mátrix. Tegyük fel, hogy az A és A^{-1} mátrixok minden el eme nemnegatív. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $k > 0$ egész, hogy A^k diagonális mátrix.

4. feladat

$$\int_0^\infty e^{-(y^2+y^{-2})}dy = ?$$

5. feladat

a. Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egységvektorok egy euklideszi térben, $|\langle v_i, v_j \rangle| < 1/(n-1)$, ha $i \neq j$. Mutassuk meg, hogy $v_1, \ldots, v_n$ lineárisan függetlenek.

b. Lengyen *m* = (*n* − 1)*n* / 2 + 1, $v_1, \ldots, v_m$ egységvektorok, $|\langle v_i, v_j \rangle|^2 < 1/(m-1)$, ha $i \neq j$. Mutassuk meg, hogy $v_1, \ldots, v_m$ közül kiválasztható *n* lineárisan független vektor.

6. feladat

Az irányított *G* egyszer? gráf irányított kromatikus száma, $_i$(*G*) az a legkisebb *k*, amelyre *k* színnel színezhet?k a csúcsok úgy, hogy egy él két vége különböz? szín? és bármely adott színpárban csak az egyik irányba vezethet él. Mutassuk meg, hogy nincs olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $\chi_i(G) \leq f(\chi(G))$ teljesül minden *G*-re, ahol (*G*) a megfelel? irányítatlan gráf kromatikus száma. Azaz az irányított kromatikus szám nem becsülhet? a kromatikus szám ismeretében.

A szerkeszt? megjegyzése

A feladatot értsük úgy, hogy csak olyan G gráfokat tekintünk, amelyekben semelyik két csúcs között nincs oda-vissza él (így az irányított kromatikus szám mindig véges).

7. feladat

Mutassuk meg, hogy ha $f \in C(0, \infty)$ és minden *x* > 0-ra $\lim_{n \to \infty} f(x/n) = 0$, akkor $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$.

8. feladat

Legyen $1 \leq k \leq n$. Mutassuk meg, hogy az $1, 2, \ldots, n$ számok egy véletlen permutációjánál

a. 1 / *k* valószín?séggel lesznek az $1, 2, \ldots, k$ számok ugyanabban a ciklusban,

b. 1 / *k*! valószín?séggel lesznek az $1, 2, \ldots, k$ számok csupa különböz? ciklusban.

Megoldás

Vegyük az $1, \ldots, n-1$ számok egy permutációját, és állítsuk el? ennek a ciklusfelbontását. Ebb?l megkaphatjuk az $1, \ldots, n$ egy permutációját úgy, hogy valamelyik ciklusba valahova beszúrjuk az *n* számot. Mivel bármely *t* hosszú ciklusba *t* helyre lehet egy új elemet beszúrni, ez összesen *n* − 1 lehet?ség. Ezen kívül kaphatunk még egy permutációt úgy is, hogy az *n* egy új, 1 hosszú ciklusba kerül. Nem nehéz látni, hogy ha vesszük az $1, \ldots, n-1$ egy egyenletes eloszlású véletlen permutációját, és a talált *n* lehetséges kib?vítés valamelyikét választjuk egyenletesen véletlenszer?en, akkor így az $1, \ldots, n$ egy egyenletes eloszlású véletlen permutációját kapjuk.

Csakhogy ha $k \leq n-1$, akkor a permutáció kib?vítése nem változtat azon, hogy az $1, \ldots, k$ számok közül melyek vannak egy ciklusban. Így aztán elég belátni az állítást a *k* = *n* esetben. A (b) állítás ilyenkor nyilvánvaló, mert a *k* szám csak az identikus permutációban kerül mindegyik elem külön ciklusba.

Az (a) állítást n-re teljes indukcióval láthatjuk be (mindig a $k = n$ esetet véve). Tegyük fel, hogy az $1,...,n$ egy permutációját megint a fenti módon, egy eggyel rövidebb permutáció kib?vítéseként kapjuk. Az összes eleme ekkor pontosan akkor van egy ciklusban, ha ez már a rövidebb permutációban is teljesült, és az n is ebbe a ciklusba kerül. Az indukciós feltétel miatt a rövidebb permutáció $1 / (n - 1)$ valószín?séggel áll egy ciklusból, és bármely ilyen permutációnak az n kib?vítése közül csak egy olyan, hogy az n nem ebbe a ciklusba kerül, tehát a keresett valószín?ség valóban $(1/(n-1)) \cdot ((n-1)/n) = 1/n$.

Megoldás másképp

Ismert, hogy ha a ciklusfelbontást úgy írjuk fel, hogy minden ciklust a legkisebb elemével kezdjük, és a ciklusokat az els? elem szerint csökken? sorrendben írjuk egymás után, akkor elhagyhatjuk a ciklusokat határoló zárójeleket, mert az elhagyás után kapott permutáció az eredetit egyértelm?en azonosítja. A zárójelek elhagyása után tehát ismét az $1,...,n$ egy egyenletes véletlen permutációját kapjuk. Az, hogy az eredeti permutációban az $1,...,k$ külön ciklusokba kerül, azzal ekvivalens, hogy az új permutációban ezek az elemek csökken? sorrendben állnak, aminek a valószín?sége nyilván $1 / (k!)$. Másrészt az, hogy az eredeti permutációban az $1,...,k$ egy ciklusba kerül, ekvivalens azzal, hogy az új permutációban ezek közül az elemek közül az 1 áll legelöl, ennek pedig $1 / k$ a valószín?sége.

9. feladat

Legyenek P,Q ortogonális projekciók egy véges dimenziós térben. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{Tr} e^{P+Q} \leq \mathbf{Tr}(e^P e^Q).$$

10. feladat

Legyen $f(z)$ reguláris a Re$z > 0$ félsíkon. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{z\to 0, \mathrm{Re}z>0} \frac{f(z)-a_0}{z} = a_1.$$

Bizonyítsuk be, hogy tetsz?leges > 0 esetén

$$\lim_{z\to 0, \mathrm{Re}z>\delta|\mathrm{Im}z|} f'(z) = a_1.$$

Megjegyzések