Tartalomjegyzék

Matematika verseny 2013

A 2013. évi BME Matematika versenyt 2013. április 15-n rendezték meg. A verseny általános leírását lásd a Matematika verseny lapon, a feladatsort és eredményeket Horváth Miklós honlapján.

Ez a lap a feladatokat tartalmazza, de ide (vagy allapokra) lehet írni a feladatok megoldását vagy megjegyzéseket hozzájuk.

Minden feladat 10 pontot ér.

1. feladat

Adott a síkon 4 pont úgy, hogy egy láthatatlan négyzet minden oldalán pontosan egy fekszik bel?le. Szerkesszünk egy ilyen tulajdonságú négyzetet. Mikor egyértelm? a megoldás?

2. feladat

Adott 12 szám az (1, 12) intervallumon. Lássuk be, hogy kiválasztható közülük 3 úgy, hogy az a háromszög, melynek oldalhosszai ezen értékek, hegyesszög?. Igaz marad-e az állítás, ha a számokat az [1, 12] zárt szakaszból választjuk?

3. feladat

Egy gráf ?majdnem síkbarajzolható?, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy minden élét legföljebb egyetlen másik él metszi. Legyen $e_m(n)$ az a maximális érték, amely élszámmal még létezik n csúcsú majdnem síkbarajzolható egyszer? gráf. Adjunk meg minél jobb $c, \tilde{c}$ értékeket, amelyre $\exists K$ úgy, hogy $cn - K \leq e_m(n) \leq \tilde{c}n + K$ minden ?elég nagy? n-re.

4. feladat

Legyenek $v_0, \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ egy $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ szimplex csúcsai. Δ *duálisa* az a Δ^d szimplex, amelynek csúcsai a $w_j = \frac{1}{n}\sum_{k\neq j} v_k \quad (j = 0..n)$ pontok. Bizonyítsuk be, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex és nem üres belsej?, akkor létezik olyan Δ szimplex, hogy $\Delta \supset K \supset \Delta^d$.

5. feladat

Legyen *X* egy olyan mátrix, amelynek minden elemének abszolút értéke legföljebb 1. Adjunk minél jobb ? ha lehet, optimális ? föls? becslést | det(*X*) | -re a következ? két esetben: a) *X* 3×3-as valós, b) *X* *n*×*n*-es komplex.

6. feladat

Legyen $S \subset \mathbb{R}$ egy pozitív Lebesgue-mértték? halmaz. Bizonyítsuk be a kontinuum-hipotézis feltételezése nélkül, hogy *S* kontinuum számosságú.

7. feladat

Milyen $a_0 \in \mathbb{C}$ esetén lesz konvergens az $a_k = 2ka_{k-1} - 1 \ \ (k = 1, 2, \ldots)$ rekurziós relációval megadott sorozat, és mi ilyenkor a határérték?

8. feladat

Az $f : T \to \mathbb{C}$ folytonos, korlátos függvény a $T = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Im(z) \leq 1\}$ tartomány belsejében holomorf. Legyen $N(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|$. Bizonyítsuk be, hogy a) $N(x) \leq max\{N(0), N(1)\}$ és b) $N(x) \leq N(0)^{1-x} N(1)^x$ minden $x \in [0, 1]$-re.

9. feladat

Mutassuk meg, hogy egy pozitív szemidefinit mátrix pozitív szemidefinit gyöke egyértelm? (azaz ha $X, Y \geq 0$ akkor $X^2 = Y^2 \Leftrightarrow X = Y$), és ezt kihasználva (vagy bárhogy máshogy) bizonyítsuk be, hogy az *A*, *B* pozitív definit mátrixok *geometriai közepe*

$$A\#B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

független a sorrendt?l: $A\#B = B\#A$.

10. feladat

Legyen *X* egy binomiális eloszlású valószín?ségi változó *n* és *p* = 1/2 paraméterkkel, *Z* egy standard normális eloszlású változó és $Y = \frac{1}{\sqrt{n}}(2X - n)$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(e^{tZ}) = e^{\frac{1}{2}t^2}$ és ezt kihasználva (vagy bárhogy máshogy) bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{E}(e^{tY^2}) = \mathbf{E}((\cosh(\sqrt{\frac{2t}{n}}Z))^n)$ minden *t* > 0 és *n* = 1, 2, .. értékekre.

Megjegyzések