1. Konvergens-e és ha igen mi a hatrárértéke az alábbi sorozatoknak:

1.1 $(n^2-\sqrt{n^4-n^2})$

Mo.

$$n^2-\sqrt{n^4-n^2}=\frac{(n^2-\sqrt{n^4-n^2})(n^2+\sqrt{n^4-n^2}=)}{n^2+\sqrt{n^4-n^2}}=$$

$$=\frac{(n^4-(n^4-n^2)}{n^2+\sqrt{n^4-n^2}}=\frac{n^2}{n^2+\sqrt{n^4-n^2}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{1}{2}$$

1.2 $(n^3-\sqrt{n^6+n^5})$

Mo.

$$n^3-\sqrt{n^6+n^5}=\frac{n^6-n^6-n^5}{n^3+\sqrt{n^6+n^5}}=\frac{-n^5}{n^3+\sqrt{n^6+n^5}}=$$

$$=-n^2\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\to-\infty\cdot\frac{1}{2}=-\infty$$

1.3 $\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right)$

Mo.

$$=\frac{n+\frac{1}{n}-n}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}=$$
$$=\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+1}\to0\cdot0\cdot\frac{1}{2}=0$$

2. Konvergens-e az alábbi sorozat és ha igen, adjuk meg a határértékét!

2.1. $\sqrt[n]{n^2+2n+4}$

Mo.

$$\sqrt[n]{n^2+2n+4}\leq\sqrt[n]{n^2+2n^2+4n^2}=\sqrt[n]{7n^2}=\sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{n^2}=$$
$$=\sqrt[n]{7}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\to1$$
$$\sqrt[n]{n^2+2n+4}\geq\sqrt[n]{4}\to1$$

2.2. $\sqrt[n^4]{n^3-3n}$

Mo.

$$\sqrt[n^4]{n^3-3n} \leq \sqrt[n^4]{n^3} = \left(\sqrt[n^4]{n^4}\right)^{\frac{3}{4}} \to 1$$

Itt $\left(\sqrt[n^4]{n^4}\right)$ az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozat $n_k=k^4$ indexsorozattal képezett részsorozata, így az 1-hez tart.

$$\sqrt[n^4]{n^3-3n} \geq \sqrt[n^4]{n^3-\frac{n^3}{2}} = \sqrt[n^4]{\frac{n^3}{2}} = \sqrt[n^4]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n^4]{n^3} \to 1 \cdot 1 = 1$$

Ahol felhasználtuk, az el?z? egyenl?tlenség végén kiszámolt határértéket.

3. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha van, mi a határértékük?

3.1. $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

Mo.

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

itt a gyök alatti sorozat az e-hez tart mert a nevezetes sorozat $n_k = k^2$ indexsorozattal adott részsorozata. Tudjuk, hogy a gyök alatti sorozatnak a 4 fels? korlátjam így a rend?relvvel:

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{4} \to 1$$

3.2. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Mo.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$$

itt a gyök alatti sorozat az e-hez tart emiatt egy indext?l kezdve egy 1-nél nagyobb konstanssal alulbecsülhet?. Ugyanis 2-höz (pontosabban az = (e?2)-höz) létezik N, hogy minden $n > N$-re a sorozat tagjai nagyobbak 2-nél.

$$+\infty \leftarrow 2^n \leq \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$$

Tehát ez a sorozat nem konvergens, de a + -hez tart.

3.3. $\left(\frac{n^2-7}{n^2+2n}\right)^{n^2}$

Mo.

$$\left(\frac{n^2-7}{n^2+2n}\right)^{n^2}=\left(\frac{\frac{n^2-7}{n^2}}{\frac{n^2+2n}{n^2}}\right)^{n^2}=\frac{\left(1+\frac{-7}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}}\to\frac{e^{-7}}{+\infty}=0$$

A határértékek indoklása az el?z? feladat megoldásában lév?höz hasonló.

4. Legyen q [0,1) Melyikb?l következik melyik tetsz?leges (a_n) sorozatra?

a) $\exists \lim_{n\to\infty} |a_n| \leq q$

b) $\limsup\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \leq q$

5. Melyikb?l következik melyik tetsz?leges (a_n) pozitív sorozatra?

a) $a_{n+1}-a_n\to 0$

b) $\exists \lim(a_n) < \infty$