Tartalomjegyzék

Határozatlan esetek

1

1.

$$\left(\frac{n^2-7}{n^2+2n}\right)^{n^2}=?$$

$$\left(\frac{n^2-7}{n^2+2n}\right)^{n^2}=\left(\frac{\frac{n^2-7}{n^2}}{\frac{n^2+2n}{n^2}}\right)^{n^2}$$

0

2.

$$\frac{1+\sqrt[n]{4^n+3n^2}}{3-\sqrt[n^2]{n^3+2n}}$$

Vegyes

3.

$$\frac{\sin\frac{\sqrt[n]{n+1}}{n}}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\frac{\sin\frac{\sqrt[n]{n+1}}{n}}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{n}\frac{\sin\frac{\sqrt[n]{n+1}}{n}}{\frac{\sqrt[n]{n+1}}{n}}\frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=$$

4.

$$\lim_{x\to,-\infty+\infty}\frac{\sin(x)\cdot\mathrm{sh}(x)}{e^{2x}}=?$$

Mo.

$$\frac{\sin(x)\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{e^{2x}}=\frac{\sin(x)\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{e^{2x}}=\frac{1}{2}\sin(x)(e^{-x}-e^{-3x})=$$

$$=\frac{1}{2}\sin(x)e^{-x}(1-e^{-2x})$$

Egyfel?l

$|f(x)|\leq\frac{1}{2}e^{-x}\to 0$, ha $x\to+\infty$

Másfel?l ha

$$x_k=\frac{\pi}{2}-k2\pi$$

akkor

$$f(x_k)=-\frac{1}{2}e^{-3x_k}(1-e^{4x_k})\geq-\frac{1}{2}e^{-3x_k}\to-\infty$$

miközben

$$f(k\pi)\equiv 0\to 0$$

tehát nincs határértéke a -   -ben.

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$$

($\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2=1$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\ln\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\ln(1+\mathrm{sh}^2 x)}{\mathrm{sh}\,x}$$

6.

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{1-x}}$$

7.

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{x}}$$

Differenciálhatóság

Legyen *f* valós-valós függvény, *u* Dom(*f*) Dom(*f*)'. Az *f* függvény differenciálható az *u* pontban, ha

1. Definíció -- létezik olyan : Dom(*f*) $\longrightarrow$ **R** függvény és olyan *m* **R** szám, hogy:

1. minden *x* Dom(*f*)-re
   f(*x*) = *f*(*u*) + *m*(*x* - *u*) + (*x*)(*x* - *u*) és
2. (*u*) = 0 és az *u*-ban folytonos.

Ebben az esetben az *f* függvény *u*-beli deriváltja *m* és jele f'(*u*)

2. Definíció -- létezik és véges a következ? határérték:

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \qquad (*)$$

Ekkor f'(*u*) maga a fenti határérték.

A két definíció ekvivalens, amit a következ? egyenl?séggel lehet igazolni:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} - A, & \text{ha} \quad x \neq u \\ \lim\limits_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)}{x-u} - A, & \text{ha} \quad x = u \end{cases}$$

ahol *A* az *m*-et jelöli, ha 1)-et tudjuk és 2)-t igazoljuk és $\lim_{x \longrightarrow u}$ (f(x)-f(u)/(x-u))-t, ha fordított a helyzet.

Világos, hogy a (*) határérték egy úgy nevezett határozatlan kifejezés, hisz mindig 0/0 alakú. Ez a a szel?k meredekségének határértéke,

Az els? definíció is szemléletes. Itt arról van szó, hogy a függvény felírható *u* körül egy lineárisan elt?n? és egy magasabb rendben elt?n? tag összegeként:

$\ell(x) = f(u) + m(x-u)$, a lineáris és $\varepsilon(x)(x-u)$ a nemlineáris

Példa. Igazoljuk, hogy

$$f(x) = e^{\sin x}$$

differenciálható a 0-ban és deriváltja 1.

Megoldás. Definíció szerint igazoljuk, azaz a pontbeli derivált (*) képletével. Legyen x≠0. Ekkor

$$\frac{e^{\sin x} - e^{\sin 0}}{x-0} = \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}\frac{x}{\sin x}$$

Ha most *x* $\longrightarrow$ 0, akkor az utolsó egyenl?ség után az els? tényez? és a második tényez? is az 1-hez tart, minthogy ezek nevezetes határértékek.

Példa. Igazoljuk, hogy

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}-\frac{1}{4}\sin x, & \text{ha} \quad x\neq 0\\ 0, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

differenciálható a 0-ban és deriváltja 1/4.

Megoldás. Definíció szerint igazoljuk, azaz a pontbeli derivált (*) képletével. Legyen x≠0. Ekkor

$$\frac{\frac{1-\cos x}{x}-\frac{1}{4}\sin x-0}{x-0}=\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{\frac{1}{4}\sin x}{x}$$

Ha most $x \longrightarrow 0$, akkor az utolsó egyenl?ség után az els? tényez? és a második tag, mint nevezetes határérték az 1/2-hez tart, míg a második tag az 1/4-hez. Emiatt a határérték 1/4.

L'Hospital-szabályok

Tétel -- Gyenge L'Hospital-szabály -- Legyenek *f* és *g*: $A \longrightarrow$ **R** valós-valós függvények, *u* *A* *A* ', *f*(u)=*g*(u)=0, mindkett? differenciálható *u*-ban és g'(u) ≠ 0. Ekkor létezik a $\lim_u$(*f*/*g*), és

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(u)}{g'(u)}$$

Ugyanis,' írjuk fel az 1. definíciónak megfelel?en a határértéket. Létezik az *u*-hoz olyan , : $A \longrightarrow$ **R**, hogy minden *x* *A* Dom(*f*/*g*)-ra

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(u)+f'(u)(x-u)+\varepsilon(x)(x-u)}{g(u)+g'(u)(x-u)+\eta(x)(x-u)}$$

és $\lim_u$ = (u)=0, $\lim_u$ = (u)=0. Emiatt és *f*(u)=*g*(u)=0 miatt

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(u)+\varepsilon(x)}{g'(u)+\eta(x)}$$

Aminek a határéttéke, ha *x* tart *u*-hoz a kívánt hányados, amennyiben ellen?rizük, hogy g'(u) + nem lesz nulla egy elég sz?k környzeteben. Ekkor ugyanis a hányadosnak nem lenne értelme. Nos, | | egy elég kis környzetben a nulla |g'(u)|/2 sugarú környzetében lesz, így ez a veszély nem fenyeget.