Tartalomjegyzék

Topológia

1. Igaz-e bármely végtelen sok zárt halmazból álló halmazrendszerre, hogy unioja nyilt?

2. Igaz-e bármely végtelen sok zárt halmazból álló halmazrendszerre, hogy unioja zárt?

3. Miert zárt a [-1;1] intervallum?

4. Van-e olyan halmaz, mely se nem zárt se nem nyílt, ill. olyan, ami nyílt is és zárt is?

Mo.

1. Nem, ellenpélda: {[-1/n,1/n]|n **N**}, ugyanis U{[-1/n,1/n]|n **N**} = [-1;1], mely nem nyílt, ugyanis a -1 pontnak nincs olyan környezete, mely teljes egészében [-1 ;1]-ben lenne.

2. Nem, ellenpélda: {[-1+1/n,1-1/n]|n **N**}, ugyanis U{[-1+1/n,1-1/n]|n **N**} = (-1;1), ugyanis ha x (-1;1), akkor lesz olyan [-1+1/n,1-1/n] mely lefedi x-et. (-1;1) nem zárt ugyanis komplementere: (- ,-1]U[1;) nem nyílt, hisz az 1 nek nincs olyan környezet, mely teljes egészében a halmazban lenne.

3. Mert komplementere a (- ,-1)U(1;) halmaz két nyílt halmaz uniója, ami nyílt.

4. Igen, a [0;1) se nem nyílt, se nem zárt (0 neki, 1 a komplementerének nem bels? pontja), és az üres és **R** nyílt-zárt, mert egymás komplementerei és az üres és **R** nyílt.

Határérték teljes differenciálhatóság

Hol totálisan diferenciálható az

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2},\qquad (x,y)\neq(0,0),\qquad f(0,0)=0$$

függvény?

Mo.

Az origón kívül differenciálhatóakból van összetéve a differenciálhatós?got meg?rz? módokon.

$f(x,0) = x$, azaz $\partial_x f(0,0) = 1$ és
$f(0,y) = -y$, azaz $\partial_y f(0,0) = -1$

Ezért a Jacobi-mártix: [1 -1]

$$\frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - [1 \quad -1]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^3-y^3-x^3-xy^2+y^3+yx^2}{x^2+y^2} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \frac{-xy^2+yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{xy(-y+x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Ez a függvény az (x,0) pontokban azonosan 0, az (x,-x) pontokban nemnulla konstans, azaz nincs határértéke a (0,0)-ban.

Lokális és tartományi széls?érték

Legyen

$$f(x,y) = x^3 + 6xy + y^2 + 15x$$

a) Hol és milyen lokális széls?értéke van?

b) Hol és mekkora az x=0, y=0, y=1-x határolta tartományon a tartományi maximuma és minimuma?

Mo.

$$\nabla f(x,y) = [3x^2 + 6y + 15, \quad 6x + 2y]$$
$$[3x^2 + 6y + 15, \quad 6x + 2y] = [0, \quad 0]$$
$$[x^2 + 2y + 5, \quad 3x + y] = [0, \quad 0]$$

Innen y=-3x, $x^2 - 6x + 5 = 0$, azaz x=1; 5, y= rendre -3, -15.

Hesse-mátrix:

$$\begin{pmatrix}6x & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}$$

Determinánsa az (1;-3) és (5;-15) pontokban rendre

$$\begin{vmatrix}6 & 6\\ 6 & 2\end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix}30 & 6\\ 6 & 2\end{vmatrix} > 0$$

azaz az els? pontban nyeregpontja van, a másodikban (30>0, 60-36>0) minimuma.

b) Belül nincs széls?értéke. A peremen: (x,0), ahol x [0,1], akkor $x^3 + 15x$, deriváltja: $2x^2 + 15$, ennek nincs nullhelye, azaz sz.m.n?: f(0,0)=0, f(1,0)=16. (0,y), ahol y [0,1], akkor y^2, azaz sz.m.n? [0,1]-en: f(0,0)=0, f(0,1)=1. Az (x,1-x) mentén, ahol x [0,1]:

> $f(x,1-x) = x^3 + 6x(1-x) + (1-x)^2 + 15x$ deriváltja:
> $f'(x,1-x) = 3x^2 + 6 - 12x - 2(1-x) + 15 = 3x^2 - 10x + 19 = 3(x - 5/3)^2 - (25/3) + 19 > 0$, azaz f(x,1-x) sz. m. n?.

Tehát f(0,0)=0 minimum, f(1,0)=16 maximum.

Konvergens sorok

Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})$

b) $\sum n\sin(\frac{1}{n^2})$

c) $\sum n\cos(\frac{1}{n^3})$

Mo.

a) Igen, $\sin x \sim_0 x$, $\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n^2}$,és valóban: : $\lim \frac{\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$ azaz, mivel $\sum 1/n^2$ konvergens, ezért az intelligens kritérium miatt az a) sor is divergens.

b) $\sum n\sin(\frac{1}{n^2})$ divergens, mert az el?z? megoldás eleje miatt, azt az alábbiakkal folytatva

$$\lim \frac{n\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1 > 0$$

azaz, mivel $\sum 1/n$ divergens, ezért az intelligens kritérium miatt a b) sor is divergens.

c) A szükséges kritérium alapján, mivel

$$\lim \cos(\frac{1}{n^3}) = \lim n = \infty \neq 0$$

azaz nem nullához tartanak a tagok, ezért nem lehet c) konvergens, azaz c) divergens. ($\lim_2$ cos=1-et használtuk fel a határérték kiszámításakor.)

Integrálhatóság

a) Riemann-integrálható-e az

$$f(x,y)=\frac{\sin x}{x}, \qquad x\neq 0$$
$$f(0,y)=0$$

függvény az [0;1]×[0,1] kockán?

b) Riemann-integrálható-e az

$$\begin{array}{ll} 1, & x^2+y^2-1\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2-1=0 \end{array}$$

függvény, azaz a $H=\{(x,y)\mid x^2+y^2-1\neq 0\}$ halmaz karakterisztikus függvénye a [-1;1]×[-1;1] kockán?

c) Riemann-integrálható-e

$$Dir(x,y)\cdot(x^2+y^2)$$

függvény, az origó középpontú egység sugarú körlapon [0;1]×[0,1] kockán? Itt Dir(x,y) 1, ha (x,y) mindkét komponense racionális, és 0, ha valamelyik irracionális? Hol differenciálható ez a függvény?

Mo.

a) Megszüntethet? szakadása van az (0,y) pontok mentén, azaz nullmérték? halmazon és korlátos, tehát integrálható.

b) Korlátos és a körvonal mentén szakad, azaz nullmérték? halmazon, tehát integrálható.

c) racionálisokra a z=x^2+y^2 forgási paraboloid, máshol a 0 függvény. Ez a körlapon az origó kivételével szakad. Ezt a [-1;1]×[-1;1]-re a 0 függvénnyel kiterjesztve nem nullmérték? sok helyen szakad, bár korlátos, azaz nem Riemann-integrálható. A függvény csak az origóban folytonos, de ott (amúgy) differenciálható is.

Integrálás normáltartományon, polárkoordinátákkal és az integrálás sorrendjének felcserésével

Iránymenti és parciális deriváltak