

Legyenek A és B halmazok. Ekkor A és B uniója:

$$A \cup B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

azaz azon elemek halmaza, mely az A illetve a B közül *legalább az egyikben benne vannak*;

A és B metszete:

$$A \cap B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

azaz azon elemek halmaza, mely az A -ban is és a B -ben is benne vannak.

Két halmaz egyenl?, akkor és csak akkor, ha ugyanazok az elemeik. Formulákban:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \Leftarrow x \in B))$$

A nyilak a következtetés irányát jelzik.

Igazoljuk a disztributív szabályt (egyik irány)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Bizonyítás. 1) Vegyünk egy tetsz?leges x -et. Igazoljuk: "<http://wiki.math.bme.hu> x baloldal, akkor x jobboldal"<http://wiki.math.bme.hu>.

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \cup C \end{array}$$

Esetszétválasztás jön, mert inent?l nem tudjuk, x a B -ben vagy a C -ben van

$$x \in B$$

$x \in B$ és $x \in A$ (igaz állítást bármihez
"<http://wiki.math.bme.hu>hozzáésselhetünk"<http://wiki.math.bme.hu>: és be)

$$x \in A \cap B$$

$x \in (A \cap B)$ vagy $x \in (A \cap C)$ (bármi

"<http://wiki.math.bme.hu>hozzávagyolható"<http://wiki.math.bme.hu> egy igaz kijelentéshez: vagy be)

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$x \in C$$

$x \in C$ és $x \in A$ (igaz állítást bármihez

"<http://wiki.math.bme.hu>hozzáésselhetünk"<http://wiki.math.bme.hu>: és be)

$$x \in A \cap C$$

$x \in (A \cap C)$ vagy $x \in (A \cap B)$ (bármi

"<http://wiki.math.bme.hu>hozzávagyolható"<http://wiki.math.bme.hu> egy igaz kijelentéshez: vagy be)

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ azaz mindkét esetben kijött a jobboldal.

2) Visszafelé ugyanígy, csak felfelé.

A tagadás (negáció) kiküszöbölési szabálya az úgy nevezett *kett?s tagadás törlésének szabálya*:

$$(\neg \text{ki}) \quad \frac{\neg\neg A}{A}$$

A bevezetési szabálya pedig az úgy nevezett *redukció ad absurdum*.

$$(\neg \text{be}) \quad \frac{\frac{A}{C}, \frac{A}{\neg C}}{\neg A}$$

Ezeknek a segítségével olyan fontos tételeket is levezethetünk, mint a De-Morgan azonosságok:

$$\begin{aligned}\neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B \\ \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B\end{aligned}$$

Ha H halmaz, akkor az A halmaznak a H -ra vonatkozó komplementere az

$$\overline{A}|_H =_{\text{def}} \{x \in H \mid x \notin A\}$$

Ezzel a De-Morgan-azonosságok halmazokkal megfogalmazott változata a következő alakban írható:

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

A fenti egyenlőségek középiskolából ismert relációval is kifejezhetők. Azt mondjuk, hogy A része B -nek, ha minden olyan esetben, amikor egy elem eleme A -nak, akkor B -nek is eleme, jelben:

$$A \subseteq B$$

Azaz az, hogy $A = B$ az ugyanaz, mint hogy $A \subseteq B$ és $A \supseteq B$ is teljesül.

$$\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

esetet.

Vegyünk egy elemet a jobboldalból és igazoljuk, hogy benne van a baloldalban. Tudjuk a metszet definíciója miatt, hogy ekkor

$$\begin{aligned}x &\notin A \\ x &\notin B\end{aligned}$$

$x \in A \vee B$ (indirekt feltevés), ezek után esetszétválasztáshoz kell folyamodnunk. Mindkét esetben ellentmondásra jutunk:

$x \notin A \vee B$ ha $x \in A$, akkor a legfels?
 ha $x \in B$, akkor a legfels? alatti egyenl?ség miatt jutunk ellentmondásra, így a
 konklúzióra jutottunk.

Egy másik jellegzetes példa a részhalmaz relációval kapcsolatos. El?tte azonban fel kell idéznünk a kvantorokra vonatkozó De-Morgan-azonosságot. A "<http://wiki.math.bme.hu>létezik"<http://wiki.math.bme.hu> szót (mely a "<http://wiki.math.bme.hu> minden"<http://wiki.math.bme.hu> duális) -tel jelöljük:

$$\neg(\forall x)A(x) \equiv (\exists x)\neg A(x)$$

$$\neg(\exists x)A(x) \equiv (\forall x)\neg A(x)$$

A kijelentések világosak: ha nem minden dolog A , akkor van olyan dolog, ami nem A . Ha nem létezik A , akkor minden dolog nem A tulajdonságú.

Az üres halmaz minden halmaznak része.

Legyen A tetsz?leges halmaz. Indirekten tegyük fel, hogy

$$\emptyset \not\subseteq A$$

Az $\emptyset \subseteq A$ formulákban így néz ki:

$$(\forall x)(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

Egy ilyen tagadása az, hogy a kvantort átírjuk a duálisára és a tulajdonságot tagadjuk:

$$(\exists x)(x \in \emptyset \wedge x \notin A)$$

Ekkor azonban azt kaptuk, hogy létezik az üres halmaznak eleme, ami ellentmondás.

Legyenek A és B halmazok. Ekkor A mínusz B vagy A különbség B :

$$A \setminus B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

azaz azon elemek halmaza, melyek az A -nak elemei, de a B -nek nem.

Nagyon hasznos azonosság, hogy a különbség átírható komplementer és metszet segítségével:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

ahol a komplementerképzés egy olyan halmazra vonatkoztatjuk, melyben minden szóban forgó halmaz részhalmazként benne van, például jelen esetben $H = A \cup B$ alkalmas ilyen halmaz.

Tetsz?leges A , B és C halmazokra

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

Írjuk fel a baloldalt és alakítsuk addig, míg ki nem jön a jobboldal:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= A \cap \overline{B \cap C} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = \\ &= (A \setminus B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Legyen H tetsz?leges halmaz. Ekkor a

$$\{f : H \rightarrow \mathbf{R}\} =_{\text{def}} \mathbf{R}^H$$

halmazt, azaz a H -n értelmezett \mathbf{R} -be képez? függvények halmazát **függvénytér**nek nevezzük. A függvénytér lineáris tér a pontonként m?veletekkel, azaz a következ?kkel:

$$f + g : H \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

ha λ valós szám, akkor

$$\lambda \cdot f : H \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \lambda \cdot f(x)$$

Függvénytér lineáris alterét is függvénytérnek nevezzük. Lineáris alter egy lineáris tér részhalmaza, ha a fenti m?veletekre zárt.

Az F függvénytér B részhalmaza bázis, ha B -beli elemek lineáris kombinációjával a tér összes eleme egyértelm?en el?áll, azaz ha minden $f \in F$ -re léteznek egyértelm?en olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ számok, hogy

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n,$$

ahol $f_1, \dots, f_n \in B$. B elemszáma a dimenzió.

Példák

1.

$$\mathbf{R}^{\mathbf{R}},$$

melynek elemeit koordinátarendszerben is tudjuk ábrázolni. Természetesen ez végtelen dimenziós.

2. Az intervallumon korlátos függvények $B(I)$ halmaza altere az el?z?nek.

3. A zárt és korlátos intervallumon folytonos függvények $C[a,b]$ tere része az a $B[a,b]$ -nek. Ugyanígy a Riemann integrálható függvények is $R[a,b]$ tere is.

4. Legyen $H = \{1,2,3\}$. Ekkor az $\{f:H \rightarrow \mathbf{R}\}$ halmazt még úgy is meg lehet adni, hogy az elemeit egy rendezett hármassba foglaljuk:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$$

Ezt jelöljük \mathbf{R}^3 -nak. \mathbf{R}^3 minden elemét meg lehet adni 3 el?re megadott elem lineáris kombinációjaként: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Ezek alkotják \mathbf{R}^3 sztenderd bázisát (rendes bázis). Általában \mathbf{R}^n . Ebbeli függvények analíziséve fogunk foglalkozni.

5. Legyen $\mathbf{R}^{2 \times 3}$ a 2-szer 3-as mátrixok tere. Ez szintén lineáris tér az elemenkénti összeadással és a skalárral szorzással. A bázisa 6 elem?
6. $\{s: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}\}$ a sorozatok (vagy a polinomok tere). Ez végtelen dimenziós és a báziselemek a hatványfüggvények.

Az N vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\|: N \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény norma N -en, ha

1. $\|v\| \geq 0$ minden $v \in N$ -re és $v=0$, ha $\|v\| = 0$.
2. minden α számra és $v \in N$ -re $|\alpha| \cdot \|v\| = \|\alpha \cdot v\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Ekkor N a $\|\cdot\|$ -val ellátva *normált tér*.

> 0 sugarú $a \in N$ középpontú nyílt gömb:

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in N \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$$

Példa. A f?példán, az \mathbf{R}^3 -en, ez az euklideszi vektorhossz, azaz a Pithagorasz-tételb?l kiszámítható

$$\|v\| = |v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Példa. Két lényeges \mathbf{R}^n -beli norma.

1. $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$
2. $\|v\|_{\max} = \max_{i=1}^n \{|v_i|\}$

Érdeemes megnézni, hogy a gömbök \mathbf{R}^2 -ben hogy néznek ki. $\|\cdot\|_1$ esetén a gömb egy csúcsára állított négyzet 2 átlóval. $\|\cdot\|_{\max}$ egy oldalára állított négyzet. $\|\cdot\|_2$ pedig egy körlap.

Függvénytéren a leggyakoribb norma a szuprérumnorma. Ha $B(H, \mathbf{R})$ a $H \rightarrow \mathbf{R}$ korlátos függvények tere, akkor ennek akármilyen alterén norma az

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{x \in H} \{|f(x)|\}$$

u **bels? pontja** H -nak, ha van olyan (gömbi) környezete u -nak, mely teljes egészében H -beli. H **nyílt** halmaz, ha minden pontja bels? pont. H **zárt**, ha komplementere, azaz az

$$N \setminus H$$

halmaz nyílt.

Tétel. Minden véges dimenziós normált tér ekvivalens egymással topologikus szempontból, azaz bármelyik norma ugyanazokat a nyílt halmazokat határozza meg.

Célszerű tehát a feladatokban választani például azt a p -edik normát, mellyel a legkönnyebben lehet számolni.

Világos, hogy \mathbf{R}^n nyílt halmaz, így ennek komplementere, az üres halmaz zárt. Ám, az üres halmaz nyílt is, hiszen minden pontja belső pont. Ha ugyanis lenne olyan pontja, ami nem belső pontja, akkor lenne egyáltalán pontja, ami lehetetlen, lévén az üres halmaz üres. Így komplementere, azaz \mathbf{R}^n zárt halmaz is. Tanulság: vannak **nyílt-zárt** halmazok (clopen in English) és vannak **se nem nyílt, se nem zárt** halmazok, például a $[0,1)$ intervallum. Vagyis "http://wiki.math.bme.hu halmaz **nem** ajtó, ami vagy nyílt, vagy zárt" http://wiki.math.bme.hu!

Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt, akármennyi nyílt halmaz uniója nyílt. A zártakra a duális állítás igaz: véges sok zárt halmaz uniója zárt, akárhány zárt halmaz metszete zárt.

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok nyílt halmaz uniója nyílt!
2. Igazoljuk, hogy véges sok nyílt halmaz metszete nyílt!
3. Adjuk példát végtelen sok nyílt halmazra, amelyek metszete nem nyílt!
4. Adjuk példát végtelen sok zárt halmazra, amelyek uniója nem zárt!

Kompakt egy K halmaz, ha minden nyílt halmazrendszerrel, melynek uniója lefedi K -t kiválasztható véges sok nyílt halmaz is, melyek véges uniója még mindig lefedi K -t.

Heine-Borel-tétel. Véges dimenziós normált térben korlátos és zárt halmaz kompakt.

\mathbf{R}^n véges dimenziószáma nagyon lényegesen hozzájárul a fenti tételek fennállásához. Általában (Hausdorff-térben) kompakt halmaz korlátos és zárt. Ám, van olyan végtelen dimenziós normált tér, melyben zárt és korlátos halmaz nem kompakt. Legyen ugyanis $\ell^\infty(\mathbf{R})$ a korlátos sorozatok tere. A téren a norma a suprémum:

$$\|s\|_\infty = \sup\{|s_n| \mid n \in \mathbf{N}\}$$

Példa.

$$H := \{s \in \ell^\infty(\mathbf{R}) \mid \|s\| \leq 1\}$$

"http://wiki.math.bme.hu gömb" http://wiki.math.bme.hu zárt, korlátos, de nem kompakt.

Ugyanis, Nyilván korlátos, mert belefoglalható a $B_2(0)$ kétség sugarú 0 körüli gömbbe. Zárt is, ehhez nézzük a komplementerét! Ha $\|s\| > 1$, az pontosan azt jelenti, hogy $\sup s > 1$, azaz létezik olyan $\epsilon > 0$, hogy minden n -re $|s(n)| > 1 + \epsilon$. Pozitív $s(n)$ -re vegyünk az $s(n) > (s(n) + 1 + \epsilon)/2 > 1 + \epsilon/2$, negatív tagokra az $s(n) < (s(n) - 1 - \epsilon)/2 < -1 - \epsilon/2$ elemekből álló t sorozatot. Ez a komplementerben halad, mert $\|t\| > 1 + \epsilon/2$.

De nem kompakt. Fedjük le ugyanis a

$$H_n := \{s \mid |s(k)| < 2, \text{ ha } k < n, \sup_{k > n} |s(k)| < 1/2\}$$

halmazokkal! Ezek nyíltak, de véges sok nem fedi le H-t.

Hasonló furcsaságok jelentkeznek a p-edik hatványon szummálható sorozatok $\ell_p(\mathbf{R})$ terében is. Számunkra esetleg a véges sorösszeggel rendelkező $\ell_1(\mathbf{R})$ tér bír jelentőséggel.