<Matematika A1a 2008

Tartalomjegyzék

Határozott integrál

Az egyváltozós analízis történetileg kialakult két jellegzetes témaköre közül az egyik az érint?probléma (lényegében a differenciálelmélet) a másik a területszámítás problémája, vagy régies elnevezéssel a kvadratúra-feladat (ami lényegében az integrálelmélet). Most a kvadratúra, azaz a függvénygörbe alatti terület definícióját adjuk meg. Ehhez azonban néhény segédfogalmat kell megismernünk.

Az [a,b] korlátos és zárt intervallum egy **Riemann-felosztás**án nem mást értünk mint egy olyan kiválasztófüggvényt, mely az [a,b]-t unióként el?állító, egymásba nem nyúló intervallumokból álló halmaz minden egyes eleméhez egy az adott elemben lév? elemet rendel, azaz egy olyan

$$\eta : \{[x_0, x_1], [x_2, x_3], ..., [x_{n-1}, x_n]\} \to [a, b]$$

függvényt, melyre:

1. n olyan véges természetes szám, hogy $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ és
2. minden J Dom( ) esetén $\eta(J) \in J$.

Az [a,b] összes **Riemann-felosztásai halmazát** RF[a,b] jelöli. Azon Riemann-felbontások halmazát, amelyekben az összes részintervallum hossza kisebb egy > 0 pozitív számnál, azt RF [a,b] jelöli, azt a halmazt az [a,b] összes **-nál finomabb Riemann-felosztásának** nevezzük.

Egy *f*, az [a,b]-n értelmezett függvény egy **Riemann-közelít? összegén** a

$$\sigma_f(\eta) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta([x_{i-1}, x_i]) \cdot |x_i - x_{i-1}|)$$

ahol a fenti jelölésekkel az [a,b] egy Riemann-felosztása.

Ekkor már definiálhatjuk az integrálhatóságot:

Definíció. Legyen *f*:[a,b] $\longrightarrow$ **R**egy zárt és korlátos intervallumon értelmezett függvény. Azt mondjuk, hogy *f* **Riemann-integrálható** és integrálja az I valós szám, ha

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\eta \in \mathrm{RF}_\delta[a,b])(|\sigma_f(\eta) - I| < \varepsilon)$$

Belátható, hogy ha *f* integrálható, akkor I egyértelm? és ekkor ennek a számnak a jelölésére az

$$\int\limits_a^b f$$, vagy az $$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

szimbólum szolgál.

Az [a,b] intervallumon Riemann-integrálható függvények halmazát R[a,b] jelöli.

Az integrál lényegében a függvénygörbe alatti terület. Integrálható függvény esetén létezik ez a terület, azaz a Riemann-felosztást egyre finomabbra véve, a Riemann-közelít? összeg minden el?re megadott legnagyobb eltérésnél közelebb kerül I-hez.

Világos, hogy ha egy függvény integrálható, akkor minden részintervallumán is integrálható (hisz ekkor azokat a felosztásokat kell venni, amik a részintervallumon belül is felosztások, és persze ezek szerint is képezve a határátmenetet, létez? határértéket kapunk). Minthogy az integrál egy szám, integrálható *f* esetén értelmes ha definiáljuk a következ?, úgy nevezett **integrálfüggvény**t (vagy a-ban elt?n? integrálfüggvényt):

$$\int f : [a,b] \to \mathbf{R}, x \mapsto \int\limits_a^x f$$

Definíció szerinti példák

1. Példa. Jóformán az egyetlen függvény, aminek az integrálhatóságát a definíció alapján könnyen igazolni tudjuk, az a konstans függvény. Az f(x) = c esetén a kiválaszott pontok mindig c függvényérték?ek, és az összes közelít? összeg mindig

$$\sigma_f(\eta) = \sum_{i=1}^n c\cdot(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b-a) = \mathrm{const.}$$

azaz

$$\int\limits_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$$

Már ezzel is azonban fel tudunk írni egy integrálfüggvényt: f:[a,b]$\longrightarrow$ **R**, f c esetén:

$$\left(\textstyle\int c\right)(x) = \int_{t=a}^x c\,\mathrm{d}t = cx - ca$$

2. Példa. Nem minden függvény integrálható.

2. a. Zárjuk le a reciprok függvényt egy ponttal:

$$f : [0,1] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \in (0,1] \\ 1854, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

(Riemann az 1854-es habilitációs dolgozatában definiálta és vizsgálta a most Riemann-integrálhatóságnak nevezett fogalmaz, mindazonáltal az integrál els?, a szigorúság követelményének eleget tév? definícióját Cauchy adta (1821) az intuitívet pedig Leibniz.) Ez a függvény nem integrálható, mert akármilyen fiom intervallumfelosztás esetén, ha az els? intervallumot hosszúra választjuk, definiálható egy ($[x_0,x_1]$) < ^{2} érték, azaz f(($[x_0,x_1]$)) > 1/ ^{2}. Ekkor viszont az els? téglalap területe 1/ lesz, ami \to 0 esetén a + -be tart, azaz az összterület nem lesz véges.

2. b. Legyen *f* a Dirichlet-függvény:

$$f : [0,1] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{ha} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

ahol **Q** a racionális számok halmaza, **R / Q** pedig nyilván az irracionális. Ez a függvény nem Riemann-integrálható, bár korlátos, mert akármilyen finom intervallum-felbontás esetén van egy olyan Riemann-kiválasztó függvény, mely mindig racionális pontokat választ ki és ezáltal a közelít? összeg mindig 1 és olyan, mely mindig irracionálist, azaz ezzel a közelít? összeg 0. Mindig lesz tehát két olyan felbontás, mely összegek különbsége legalább 1.

A Riemann-inergrálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Bár a Riemann-integrálhatóság általában könnyen kezelhet? fogalom, a következ? tétel bizonyításához azonban az egyváltozós analízis szinte összes eszközét be kell vetni. Nem csoda, hogy csak 1905-ben fogalmazhatta meg Lebesgue, egy tágabb perspektívából szemlélve a Riemann-integrált.

Tétel. Legyen *f*: [a,b] $\longrightarrow$ **R** korlátos és zárt intervallumon értelmezett függvény. *f* pontosan akkor integrálható, ha korlátos, és szakadási helyeinek halmaza Lebesgue-nullmérték? halmaz, azaz

$$f \in \mathrm{R}[a,b] \ \Leftrightarrow\ (f \in \mathrm{B}[a,b] \ \wedge\ \mathrm{m}(\mathrm{discon}(f)) = 0)$$

Itt Lebesgue-nullmérték?nek nevezünk egy *H* **R** halmazt, ha minden > 0-hoz létezik olyan (I_n) intervallumsorozat, hogy ennek összhossza < és lefedi *H*-t.

Biztos nem nullmérték? például egy nemelfajuló intervallum, mert annak a mértéke az intervallum nemnulla hossza. De véges halmaz nullmérték?, mert lefedhet?, egy határértékben elt?n? intervallumsorozat-rendszerrel. Belátható, hogy megszámlálható pont nullmérték? halmazt alkot. Konkrétan, könnyen belátható, hogy az 1/n pontjai nullmérték? halmazt alkotnak.

Világos, hogy a Dirichlet-függvényes példa azért jó ellenpélda, mert ez a függvény [0,1]-en mindenhol szakad, azaz discon(Dir)=[0,1], melynek a mértéke 1.

Példa. Felvet?dik a kérdés: van-e konitinuum sok helyen szakadó, Riemann-integrálható függvény. A válasz igenl?. A konstrukció e következ?. El?ször definiáljuk az **ördög lépcs?je** függvényt:

A [0,1] intervallumot osszuk 3 részre és vegyük ki a bels? nyílt harmadot. Ezen a szakaszon legyen a függvény értéke 1/2. Ismételjük a megmaradt két zárt intervallumra, és az érték legyen ott 1/4 ill. 3/4. A fennmaradt részeket is osszuk, majd a középs? harmad értéke mindig a két széls? közepe legyen... Ha csak a bels? harmadokat vesszük, akkor ami megmarad a halmazból, az az úgy nevezett Cantor-halmaz. A Cantor-halmaz kontinuum számosságúan végtelen, de Lebesgue-nullmérték? -- ezt a két dolgot persze nem bizonyítjuk. A függvény mindenhol folytonos, a m.m- deriválható és a deriváltja 0 (de nem intervallumon értelmezett: Dom = [0,1]\C). Ha most vesszük a deriváltfüggvényét és kiterjesztjük a C pontjaiban úgy, hogy ott 1 legyen az értéke, akkor ez egy kontinuum számosságú, de Lebesgue-nullmérték? halmazon szakadó, korlátos függvény, azaz integrálható. És az integrálja 0. Ebb?l is látható, hogy a fenti ekvivalenciatétel csodálatosan oldja meg, hogy bár a Riemann-felosztás véges, kontinuum számosságú, L-0-m. résszel is el tud bánni.

A Riemann-integrálhatóság néhány kritériuma

Részletezünk néhány hasznos esetet a fenti tételb?l.

1. $f \in \mathrm{R}[a,b] \;\Rightarrow\; f \in \mathrm{B}[a,b]$

   csak korlátos függvények R-intgrálhatóak
2. $f \in \mathrm{R}[a,b] \;\Leftarrow\; f \in \mathrm{C}[a,b]$

   (Cauchy) világos: ha folytonos, akkor nincs szakadási pontja, és korlátos a Weierstrass-tétel miatt
3. $f \in \mathrm{R}[a,b] \;\Leftarrow\; f \in \mathrm{M}[a,b]$

   monoton függvény R-integrálható (minden feltétel nélkül), amiatt a nem említett tétel miatt, hogy intervallumon értelmezett, monoton függvénynek csak megszámlálható szakadási pontja van, korlátos és zárt intervallumon pedig egy ilyen függvény korlátos.

Feladat. Integrálhatóak-e az alábbi függvények és ha igen, mi az integráljuk?

1.

$$f:[-1,1]\to\mathbf{R},\ x\mapsto\begin{cases}|x|\sin(\frac{1}{x}), & \text{ha} \quad x\neq 0\\ \\ 0, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

Igen, mert folytonos (illetve legfeljebb csak 1 ponton szakad, miközben korlátos). Ezen kívül páratlan: |-x|sin(1/-x) = -|x|sin(1/x), emiatt az origóra szimmetrikus intervallumon az integrálja:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

2.

$$f:[0,1]\to\mathbf{R},\ x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{2^{i+1}}, & \text{ha} \quad \frac{1}{2^{i+1}}<x\leq\frac{1}{2^i}\\ \\ 0, & \text{ha} \qquad x=0\end{cases}$$

Igen, mert monoton. Az integrálját elegend? egyetlen végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó közelít? összegsorozat határértékeként számolni, hiszen ha ez nem konvergálna, akkor nem teljesülne a definícióban megkövetelt határérték létezése. Az intervallumot 2^m részre osztjuk fel. Ekkor az összeg:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{4^k}=-1-\frac{1}{4^m}+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{4^k}$$

Ennek a határértéke a mértani sor összegképlete miatt:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-1+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

3.

$$f:[0,1]\to\mathbf{R},\ x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{1+\sin(\frac{1}{x})}, & \text{ha}\quad x\neq\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi},0\\[2ex] 0, & \text{ha}\quad x=\frac{1}{\frac{-\pi}{2}+2k\pi},0\end{cases}$$

Megszámlálható sok szakadása van ugyan a függvénynek, de nem korlátosan a szakadások, így a függvény nem integrálható:

$$\nexists\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Az határozott integrál néhány tulajdonsága

A következ?kben feltesszük, hogy az f és g a formulákban szerepl? intervallumokat tartalmazó valamely intervallumon Riemann-integrálható.

1. Intervallum szerinti additivitás:
$$\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$$
2. Integrandus szerinti additivitás:
$$\int_a^b f+\int_a^b g=\int_a^b f+g$$
3. Integrandus szerinti monotonitás.
$$f\leq g\qquad\Rightarrow\qquad\int_a^b f\leq\int_a^b g$$
4. Integrandus szerinti homogenitás:
$$c\cdot\int_a^b f=\int_a^b cf\qquad(c\in\mathbf{R})$$
5. Abszolút becslés.

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

6. Triviális alsó és fels? becslés.

$$(\inf f)\cdot(b-a) \le \int_a^b f \le (\sup f)\cdot(b-a)$$

7. Eltolásinvariancia.

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Az integrálfüggvény néhány tulajdonsága

Az integrálfüggvény viselkedését vizsgálva meglep? következtetésre juthatunk.

Példa. Vegyük az alábbi lépcs?s függvényt:

$$f:[0,2]\to\mathbf{R},\ x\mapsto\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x\in[0,1)\\ 2, & \text{ha} \quad x\in[1,2]\end{cases}$$

írjuk fel az integrálfüggvényét tudva-tudván, hogy az nem más mint a területfüggvény:

$$T(x)=\left\{\begin{matrix}x\cdot 1, & \text{ha} \quad x\in[0,1)\\ 1+2(x-1), & \text{ha} \quad x\in[1,2]\end{matrix}\right\}=\begin{cases}x, & \text{ha} \quad x\in[0,1)\\ 2x-1, & \text{ha} \quad x\in[1,2]\end{cases}$$

Ábrázolva, azt kapjuk, hogy T képe egy törött vonal, **folytonos** és mindenhol, ahol nem törik, a **deriváltja az integrandus**. T diff.-ható a [0,1)U(1,2] halmazon és

$$T' = f|_{[0,1)\cup(1,2]}$$

Az integrálfüggvény differenciálhatóságáról

Az integrandus folytonossági helyein az integrálfüggvény valóban differenciálható. Az alábbi tételt az analízis els? alaptételének szokás nevezni.

Tétel. -- A kalkulus fundamentális tétele I. -- Legyen *f*:[a,b] $\longrightarrow$ **R** integrálható. Ha f folytonos az *u* [a,b] pontban, akkor f differenciálható *u*-ban és

$$\left(\int f\right)'(u) = f(u)$$

Bizonyítás. *f* folytonos *u*-ban, ezért tetsz?leges > 0-ra létezik olyan > 0, hogy fl$_{B(,u)}$ B (f(u)), azaz:

$$f(u)-\varepsilon \le \inf f|_{\mathrm{B}_\delta(u)} \le \sup f|_{\mathrm{B}_\delta(u)} \le f(u)+\varepsilon$$

Írjuk fel a deriváltra a különbségi hányadost! Legyen x,y olyan, hogy az u sugarú környezetébe esik. Ekkor az integrál intervallum szerinti additivitása miatt:

$$\frac{\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f}{y-x} = \frac{\int\limits_x^y f}{y-x}$$

Ha most a triviális alsó és fels? becslést vesszük:

$$f(u)-\varepsilon \leq \inf f|_{[x,y]} = \frac{\inf f|_{[x,y]}\cdot(y-x)}{y-x} \leq \frac{\int\limits_x^y f}{y-x} \leq \frac{\sup f|_{[x,y]}\cdot(y-x)}{y-x} \sup f|_{[x,y]} \leq$$

s mivel tetsz?leges volt, ezért f(u) nem más, mint az integrálfüggvény u-beli különbségi hányadosának határértéke (az x=u helyettesítéssel). QED

Látható, hogy a bizonyításban többet láttunk be. Egyfajta u körüli "http://wiki.math.bme.huegyenletes differenciálhatóságot"http://wiki.math.bme.hu, az úgy nevezett er?s differenciálhatóságot. Ez azért lehet fontos, mert ha az integrálfüggény deriváltja nem nulla, akkor nem csak ?, de az inverze is Lipschitz-folytonos, amib?l pedig az következik, hogy mind az i.f. mind az inverze nullmérték? halmazt nullmérték?be képez.

Az integrálfüggvény Lipschitz-tulajdonsága

És persze az integrálfüggvény "http://wiki.math.bme.hunagyon"http://wiki.math.bme.hu folytonos, egészen pontosan Lipschitz-tuljadonságú vagy más névven Lipschitz-folytonos, azaz

létezik olyan L nemnegatív szám, hogy minden x,y [a,b]-re

$$|F(x)-F(y)| \leq L|x-y|$$

azaz létezik olyan L, hogy minden x,y [a,b]-re

$$\left|\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f\right| \leq L|y-x|$$

Ugyanis a triviális fels? becslésb?l:

$$\left|\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f\right| \leq \left|\int\limits_x^y f\right| \leq \int\limits_x^y |f| \leq \sup|f|\,|_{[x,y]}\cdot|y-x| \leq \sup|f|\cdot|y-x|$$

ahol L-nek alkalmas a sup |f| szám.

A Lipschitz-tulajdonság és folytonosság kapcsolatáról lásd még [itt].

Példák

$$\left(\int_0^x \operatorname{sc} t \,\mathrm{dt}\right)'(x) = ?$$

$$\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t\right)'(x) = ?$$

Vizsgáljuk meg növekedés szempontjából az

$$[0,+\infty) \to \mathbf{R},\ x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

szinusz integrálisz függvényt!

Primitívfüggvények

Definíció. Azt mondjuk, hogy az *f*:[a,b] $\longrightarrow$ **R** függvénynek primitív függvénye az *F*:[a,b]$\longrightarrow$ **R** differenciálható függvény, ha F' = f.

Világos, hogy ha F primitív függvénye f-nek, akkor akármilyen konstans C-vel F + C is primitív függvénye f-nek, hisz (F + C)'= F' = f. Ennél több is igaz. Ha f-nek primitívfüggvénye F, akkor f összes primitívfüggvénye F + C alakú, ahol C tetsz?leges valós szám. Ez az alábbi fontos tétel közvetlen következménye:

Tétel. Ha az *F*:[a,b]$\longrightarrow$ **R** differenciálható függvény olyan, hogy F' 0, akkor létezik olyan C valós szám, hogy F C.

Bizonyítás. Egyszer?en a Lagrange-tételt kell alkalmazni F egy tetsz?leges [a,x]-re történ? lesz?kítésére:

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(\xi) = 0$$

azaz

$$F(a) = F(x) \qquad (x \in [a,b])$$

QED

Ha tehát egyáltalán van f-nek van primitív függvénye és F ilyen, akkor ezek halmaza:

$$\{F + C \mid C \in \mathbf{R}\}$$

Talán fellengz?sség, de a fenti tételt néha az integrálszámítás alaptételének nevezik. Ennek egy kiterjesztett formája azonban tényleg méltó erre a névre:

Tétel. Ha az *F*:[a,b]$\longrightarrow$ **R** differenciálható függvény majdnem mindnehol differenciálható, ezekben a pontokban a derivált nulla és *F* Lipschitz-tulajdonságú, akkor *F* konstans.

Az alábbi tétel szerint, amit szintén joggal neveznek a kalkulus fundamentális tételének, ha egy integrálható függvénynek van primitív függvénye, akkor az integrálfüggvények és primitívfüggvények halmaza egybeesik, s?t:

Tétel. *Newton--Leibniz-formula* Legyen f:[a,b]$\longrightarrow$ **R** integrálható és létezzen primitív függvénye. Ekkor f mindnen F primitív függvényére:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Ez a kalkulus második fundamentális tétele. Érdemes alaposan megvizsgálni a feltételeit, mert tanulságos példákra lelhetünk.

```
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
+ létezik primitív függvénye              +          Dir
+                                         +
+                                         +
+                **********************************************************
+       g'       *         h'             +             R-integrálható    *
+                *                        +                               *
+                *  ###############       +                               *
+                *  #  folytonos  #       +                               *
+                *  #             #       +                               *
+                *  ###############       +          Ent|[0,2]            *
+                *                        +                               *
+                *                        +                               *
+++++++++++++++++*+++++++++++++++++++++++++                               *
                 *                                                        *
                 *                                                        *
                 *                                                        *
                 **********************************************************
```

A Dir Dirichlet-függvények nem létezik primitívfüggvénye, mert ha lenne olyan függvény, aminek ? a deriváltja lenne, akkor ?, mint deriváltfüggvény nem lenne Darboux-tulajdonságú: két függvényértéke között nem mindent venne fel. Azt is megnéztük, hogy R-integrálja sincs. (Bár Lebesgue-integrálja 0.)

Az Ent egészrész függvény integrálható (egy korlátos és zárt intervallumon), mert monoton, de nincs primitív függvénye, mert derivált nem ugorhat.

Legyen g : [-1,1] $\longrightarrow$ **R** a következ?:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ekkor g differenciálható, így g'-nek g primitívfüggvénye, de tudjuk, hogy g'-nek nem korlátos másodfajú szakadása van a 0-ban, így g' nem lehet integrálható.

Végül nézzünk példát olyan függvényre, mely nem folytonos, de értelmes rá a N--L-formula. Legyen h: [-1,1] $\longrightarrow$ **R** a következ?:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ekkor g differenciálható, így g'-nek g primitívfüggvénye, és tudjuk, hogy g' korlátos és csak a 0-ban van egyetlen szakadása, így g' integrálható.

Megjegyezük, hogy a görbe alatti területet nem véges összegekkel, hanem végtelen sorral közelít? Lebesgue-integrál olyan általános, hogy ilyen vagy még általánosabban definiált értelemben nem integrálható függvényt keresni már komoly matematikai/halmazelméleti kihívást jelent.

Newton?Leibniz-tétel. Legyen *f* R[a,b] és létezzen *f*-nek primitív függvénye éspedig az *F*. Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Bizonyítás. Elegend? belátni, hogy ha *A*-val jelöljük az integrál értékét, akkor *A* minden számnál közelebb van az F(b)-F(a) értékhez. Legyen >0. Az integrálhatóság definíciójából tudjuk, hogy az számhoz létezik olyan >0, hogy minden RF [a,b] felosztásra teljesül, hogy

$$|A - \sum_{I \in \mathrm{Dom}(\eta)} f(\eta(I))|I|| < \varepsilon$$

Tekintsünk egy -nál finomabb intervallumfelbontást:

$\{[a,x_1],...,[x_{n-1},b]\}$

függvényt! Ekkor a részintervallumokra felírható a Lagrange-tétel és minden részintervallumra létezik olyan

$$\eta([x_{i-1}, x_i]) \in [x_{i-1}, x_i]$$

szám, hogy az alábbi teleszkopikus összeg el?áll integrálközelít? összeg alakjában:

$$F(b) - F(a) = (F(b) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + (F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + ... + (F(x$$
$$= F'(\eta([x_{n-1}, x_n]))(x_n - x_{n-1}) + ... + F'(\eta([x_1, x_0])(x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-}$$

De az

$$[x_{i-1}, x_i] \mapsto \eta([x_{i-1}, x_i])$$

függvény egy -nál finomabb Riemann-közelít?összeg (hiszen a intervallumokat -nál rövidebbre választottuk), így ennek eltérése az integráltól kisebb mint :

$$|A - (F(b) - F(a))| = |A - \sum_{i=1}^{n} f(\eta([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon$$

azaz igazoltuk a N?L-formulát.

Az ábrán van egy különlegesen fontos eset. Amikor az integrandus folytonos, akkor a függvénynek biztosan létezik primitívfüggvénye. Ez annak a tételnek a duálisa, hogy folytonos függvény integrálható.

Tétel. *f*   C[a,b], akkor *f*-nek (biztosan) létezik primitívfüggvénye.

Ugyanis ekkor az integrálfüggvény minden pontban differenciálható, azaz az integrálfüggény primitívfüggvénye *f*-nek.

Jelölés. Ha f folytonos, akkor indokolt a primitív függvények összességét a

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

alakban írni, ahol C tetsz?leges szám.

Megjegyzés. Ha tehát az a kérdés, hogy melyek a primitív függvényei f-nek, akkor a válasz a fenti kifejezés, ahol a **határozatlan integrált** szimbolizáló tag általában egy konkrét függvény.