Tartalomjegyzék

Improprius integrál

Lásd például: elmélet és példák, megoldások De, ezek nagyon nehéz feladatok!

Definíció. Ha az *f*: *I* \to **R** az *I* minden korlátos és zárt részintervallumán integrálható (jelben: f R^{loc}(I)), és az integrálfüggvényeinek létezik és véges a határértéke az I végpontjaiban, akkor azt mondjuk, hogy f **improprius integrálható I-n** és **improprius integrálján** az

$$\int\limits_I f=\lim_{x\to\sup(I)}F(x)-\lim_{x\to\inf(I)}F(x)$$

számot értjük, ahol F az f egy tetsz?leges integrálfüggvénye.

Elemi példák

1.

$$\int\limits_0^1\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to 1}\ln x-\lim_{x\to 0}\ln x=0-(-\infty)=+\infty$$

azaz nem konvergens.

2. Ellenben a

$$\int\limits_0^1\frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x\qquad(r<1)$$

már létezik, mert $F(x)=\frac{1}{-r+1}\frac{1}{x^{r-1}}=\frac{1}{-r+1}x^{1-r}$ ha x$\longrightarrow$ 0 esetén 0 -hoz tart, így pl.

$$\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=...$$

3. Hasonlóképpen

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

szintén konvergens.

Összetettebb példák

1.

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}^7\, x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{8}\mathrm{arctg}^8\, x - \lim_{x\to 0} \frac{1}{8}\mathrm{arctg}^8\, x = \frac{\pi}{16} - 0 = 0$$

Ekvikonvergencia-kritérium

Tétel. (Ekvikonvergencia-kritérium) Ha az f,g: I $\longrightarrow$ **R** függvények lokálisan integrálhatók, *u* az *I* akármelyik végpontja (akár végtelen is) és létezik és pozitív a

$$\lim_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték, akkor f és g improprius integráljai egyszerre konvergensek vagy egyszerre divergensek.

A fenti határértéket (tetsz?leges u I'-re) még így is szokás jelölni:

$$f(x) \sim_u g(x) \qquad \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \qquad \lim_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbf{R}^+$$

és azt mondják, hogy f az u körül úgy viselkedik, mint g.

Példák. 1.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{arc\,tg}(x)}{x^2}$$

Mivel az arc tg határértéke a végtelenben /2, ezért sejthet?, hogy a függvény improprius integrálhatóság szempontjából úgy viselkedik, mint az $1/x^2$. ezt a következ?kkel igazoljuk:

$$\lim_{+\infty} \frac{\frac{\mathrm{arc\,tg}\,(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{+\infty} \mathrm{arc\,tg}\,(x) = \frac{\pi}{2}$$

Tehát az integrál konvergens.

$$\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \sin^3\frac{1}{x}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{th}(x)$$

Alkalmazások, forgástest térfogata: :*Lásd:* itt