Tartalomjegyzék

Primitívfüggvény-keresés

Primitívfüggvény-keresésnek két metódusa van. Az egyik a **helyettesítéses integrálás**, a másik a **parciális integrálás**. Ezek el?tt azonban egy triviális módszer, a deriválási táblázat megfodítása és az integrál eltolásinvarianciájának felhasználása. (Esetleg a lineáris argumentumú alapintegrál kiszámítása.)

Alapintegrálra visszavezethet? integrálok

Ha tehát vesszük az elemi függvények és inverzeinek deriválási táblázatát, akkor jobbról balra olvasva megkapjuk az **alapintegrálok** táblázatát.

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad (x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$$

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \qquad (x\in\mathbb{R}^+, -1\neq\alpha\in\mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|+C \qquad (0\neq x\in\mathbb{R})$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (x \in \mathbb{R}, 1 \neq a \in \mathbb{R}^+)$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\, x + C \qquad (k\pi \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + C \qquad (\frac{k\pi}{2} \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \mathrm{sh}\, x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \mathrm{ch}\, x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cth}\, x + C \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{th}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arc\,tg}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C = \begin{cases} \mathrm{ar\,th}\, x + C & (1 > |x| \in \mathbb{R}) \\ \mathrm{ar\,ch}\, x + C & (1 < |x| \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arc\,sin} x + C \qquad (1 > |x| \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{ar\,sh}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C = \begin{cases} \mathrm{ar\,ch}\, x + C & (1 < x \in \mathbb{R}) \\ -\mathrm{ar\,ch}(-x) + C & (1 > x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Alapintegrálok kiszámítása táblázatból

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + C$$

vagy a legkönnyebben elronthatók:

$$\int 5\,\mathrm{d}x = 5x + C$$

$$\int 0\,\mathrm{d}x = C$$

Alapintegrálok és eltolásinvariancia

Az integrál **eltolásinvarianciáját** használva:

$$\int \frac{1}{x+8}\,\mathrm{d}x = \ln|x+8| + C$$

Lineáris agrumentumú integrandus

A **lineáris agrumentumúkra** vonatkozó képlet:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

ahol F'=f. Hiszen az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b) = \frac{1}{a}\cdot f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$$

Ezzel pl:

$$\int \sin(5x-7)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos(5x-7) + C$$

Megjegyzés. Érdemes fejünkbe vésni a sin függvény deriváltajainak függvénysorozatát:

sin
cos
– sin
– cos
sin
cos
⋮

felfejé haladva integrálunk, lefelé haladva deriválunk.

pl.

$$\int e^{(2008x-2007)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2008}e^{(2008x-2007)} + C$$

Polinom/lineáris alak

$$\int \frac{x-3}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+1-4}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{4}{x+1}\,\mathrm{d}x = x - 4\ln|x+1| + C$$

$$\int \frac{2x+1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(x+2)-3}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int 2 - \frac{3}{x+2}\,\mathrm{d}x = 2x - 3\ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{x^2+2}{x-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

itt már érdemes polinomosztással eljárni:

```
    (x^2 + 2) : (x - 1) = x + 1
-    x^2 - x
   ---------
       x + 2
-      x - 1
     --------
           3
```

$$\int \frac{x^2+2}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int x + 1 + \frac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-1| + C$$

Néha $x^2 + 1$ nevez?j?re is m?ködik:

$$\int \frac{x^2-7}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-8}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{8}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x - 8\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C$$

Linearizáló formulák

Ezek arra alkalmasak, hogy a $\sin^2$, $\cos^2$, sh^2. ch^2 függvényeket (illetve alkalmasan megváltoztatott argumentumú változatukat) ki lehessen integrálni:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}$$
$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}$$

Mindezek a következ?k miatt állnak fenn:

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$
$$\cos^2 - \sin^2 = \cos(2x)$$

ezért ezeket kivonva ill. összeadva, majd 2-vel elosztva a fels? kett?t kapjuk. A másik kett?:

$$\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$$
$$\mathrm{ch}^2 + \mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}(2x)$$

Itt érdemes megjegyezni az **Osborne-szabályt**: ha egy trigonometrikus azonosságban kicseréljük a megfelel? hiperbolikus függvényekre az összetev?ket és minden olyan tag el?jelét megváltoztatjuk, melyek két sh szorzatából állnak (speciálisan a sh^2-ek elé egy - jelet teszünk), akkor megkapjuk a hiperbolikus azonosságot. Lásd: *Osborne-szabály*.

Ezek f?leg határozott integráloknál adnak "http://wiki.math.bme.huszép"http://wiki.math.bme.hu eredményt

Példa.

$$\int_0^\pi \sin^2 x \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Helyettesítéses integrálás

Az els? keresési eljárás az összetett függvény deriválási szabályának megfordításán alapul.

Tétel. Legyen g:I $\longrightarrow$ J, F: J $\longrightarrow$ **R** folytonosan differenciálható függvények és f: J $\longrightarrow$ **R** pedig olyan, hogy az F' = f, akkor az x $\longmapsto$ f(g(x)) $\cdot$ g'(x)-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$$

Bizonyítás. A primitív függvény létezését az garantálja, hogy az integrandus folytonos.

Elegend? ellen?rizni, hogy x $\longmapsto$ F(g(x)) primitív függvénye x $\longmapsto$ f(g(x)) $\cdot$ g'(x)-nek, azaz az el?bbi deriváltja az utóbbi:

$$F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

QED.

...-alakú integrálok

Ebb?l a tételb?l származtathatjuk a "http://wiki.math.bme.hu**... alakú integrál**okat"http://wiki.math.bme.hu:

1. $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (\ g(x) = ax+b \text{ esete})$
2. $\displaystyle\int g^n(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C \qquad (\ f(\,.\,) = (\,.\,)^n \text{ esete } n \neq -1)$
3. $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|g(x)| + C \qquad (\ f(\,.\,) = \ln(\,.\,) \text{ esete })$

Példák.

1. $\int \frac{x}{\cos^2(x^2+5)}, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\cos^2(x^2+5)}, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{tg}\,(x^2+5)+C$ hiszen a "http://wiki.math.bme.huküls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\,.\,) = \frac{1}{\cos^2(\,.\,)} \qquad \to_{\int} \qquad F(\,.\,) = \mathrm{tg}\,(\,.\,)$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = x^2+5 \qquad \to' \qquad g'(x) = 2x$$

2.

$$\int \frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{arc\,tg}\,x)^1 \cdot \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{arc\,tg}^2\,x}{2}+C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.huküls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\,.\,) = (\,.\,)^1 \qquad \to_{\int} \qquad F(\,.\,) = \frac{(\,.\,)^2}{2}$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = \mathrm{arc\,tg}\,x \qquad \to' \qquad g'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

3.

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\arcsin x| + C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.huküls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\,.\,) = (\,.\,)^{-1} \qquad \to_{\int} \qquad F(\,.\,) = \ln|\,.\,|$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = \arcsin x \qquad \to' \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.

$$\int x^2\,\sqrt[2008]{\mathrm{sh}\,x^3}\cdot\mathrm{ch}\,(x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sqrt[2008]{\mathrm{sh}\,x^3}\cdot(3x^2\mathrm{ch}\,(x^3))\,\mathrm{d}x = \frac{2008}{3\cdot 2009}(\mathrm{sh}\,x^3)^{\frac{2009}{2008}}+C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.huküls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\,.\,)=(\,.\,)^{\frac{1}{2008}}\qquad\to_{\int}\qquad F(\,.\,)=\frac{2008}{2009}(\,.\,)^{\frac{2009}{2008}}$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x)=\mathrm{sh}\,(x^3)\qquad\to'\qquad g'(x)=3x^2\mathrm{ch}\,(x^3)$$

Integrálás a helyettesítés elvégzésével

Megjegyzés. Intermezzóként megemlítjük, hogy a helyettesítés elnevezés abból fakad, hogy ekkor lényegében új ismeretlent vezetünk be. Persze az ezzel való számolás egy egészen más szemléletet igényel. A f? képlet ekkor:

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x=\int f(u)\,\mathrm{d}u\bigg|_{u=u(x)}=F(u)+C|_{u=u(x)}$$

ahol el kell végezni az

$$u=u(x)\qquad\to^{(\,.\,)^{-1}}\qquad x=x(u)$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u'(x)\qquad\to\qquad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{u'(x(u))}$$

szimbolikus helyettesítést.

5. (exponenciális helyettesítés)

$$\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x=?$$

$$u=e^x\qquad\to^{(\,.\,)^{-1}}\qquad x=\ln u$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=e^x=u\qquad\to\qquad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{{}^1\cancel{u}}{1+u^2}\cdot\frac{1}{\cancel{u}_1}\,\mathrm{d}u\bigg|_{u=e^x}=\mathrm{arc\,tg}\,(u)+C|_{u=e^x}=\mathrm{arc\,tg}\,(e^x)+C$$

5. (gyökös helyettesítés)

$$\int\frac{2x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=?$$

$$u=\sqrt{x}\qquad\to^{(\,.\,)^{-1}}\qquad x=u^2$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2u}\qquad\to\qquad \mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{2x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2u^2}{1+u}\,\frac{1}{2u}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u = \int \frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}u =$$

$$\int \frac{u+1-1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int 1 - \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = u - \ln|1+u| + C|_{u=\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \ln\sqrt{x} + C$$

6. (trigonometrikus helyettesítés)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$u = \arccos x \qquad \longrightarrow^{(\,.\,)^{-1}} \qquad x = \cos u$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sin u \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{d}x = -\sin u\,\mathrm{d}u$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin u)\mathrm{d}u = -\int \sin^2 u\,\mathrm{d}u =$$

$$-\int \frac{1-\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) + C\Bigg|_{u=\arccos x} = -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{4}\sin(2\arccos$$

Parciális integrálás

A helyettesítéses integrálás a függvénykompozíció deriválására szolgáló képlet felhasználása volt primitívfüggvény keresésre. Most a szorzási szabályt fogjuk használni.

Tétel. Legyen f,g:[a,b] $\longrightarrow$ **R** folytonos és F,G:[a,b] $\longrightarrow$ **R** differenciálható olyan, hogy F' = f, G' = g. Ekkor az alábbi képletben szerepl? összes integrandusnak létezik primitív függvénye és

$$\int Fg = FG - \int fG$$

Bizonyítás. Elég a bizonyítani, hogy a jobb oldal deriváltja a baloldali integrandus. Ehelyett egy kicsit másként csináljuk: belátjuk, hogy az FG függvény primitívfüggvénye az fG + Fg függvénynek, majd kefejezzük vel?le a fenti formula baloldalát:

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$$

tehát

$$FG = \int fG + Fg = \int fG + \int Fg$$

amib?l már következik a fenti formula. QED.

Polinom szor exp, trig, hip

Az els? alkalmazás az, amikor a egymás után parciális integrálásokkal polinommentes formulává alakítjuk az integrandust. Ekkor a fenti képlet F-je a polinom, amib?l egyel alacsonyabb fokú polinomszoros integrandus keletkezik az fG integrál esetén.

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$$

Hiszen

$$\begin{array}{lll} F = \mathrm{id} & \to' & f = F' = 1 \\ g = \sin & \to^{\int} & G = \int g = -\cos \end{array}$$

Egy hasonló:

$$\int (2x+1)\mathrm{sh}\,(3x-2)\,\mathrm{d}x = (2x+1)\frac{1}{3}\mathrm{ch}\,(3x-2) - \int 2\cdot\frac{1}{3}\mathrm{ch}\,(3x-2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2x+1}{3}\mathrm{ch}\,(3x-2) - \frac{2}{9}\mathrm{sh}\,(3x-2)$$

Hiszen

$$\begin{array}{lll} F = 2\mathrm{id} + 1 & \to' & f = F' = 2 \\ g = \mathrm{sh}\circ(3\mathrm{id}-2) & \to^{\int} & G = \int g = \frac{1}{3}\mathrm{ch}\circ(3\mathrm{id}-2) \end{array}$$

Rekurziós integrálok, formulák

1.

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \ln^2 x - \int \frac{1}{x}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$$

az

$$\begin{array}{lll} F = \ln & \to' & f = F' = \frac{1}{\mathrm{id}} \\ g = \frac{1}{\mathrm{id}} & \to^{\int} & G = \int g = \ln \end{array}$$

szereposztással. A formulában visszatért a keresett integrál, így ezt kifejezve:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

2.

$$\int \cos(x)\cdot e^x \,\mathrm{d}x = \cos(x)\cdot e^x - \int (-\sin x)\cdot e^x \,\mathrm{d}x = \cos(x)\cdot e^x + \sin(x)\cdot e^x - \int \cos(x)\cdot e^x \,\mathrm{d}x$$

amib?l

$$\int \cos(x)\cdot e^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cos(x)\cdot e^x + \sin(x)\cdot e^x) + C =$$

tehát kétszeri parciális integrálással értük el.

3. Rekurziós formulát kapunk az alábbi I_n alakú integrálokra:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$$

az utolsó tagot parciálisan integráljuk ki:

$$= \frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{}{(n-1}$$

azaz I_n kifejezhet? I_{n-1}-segítségével.

Inverzfüggvények integrálja

Az

$$\int f^{-1} = \int f^{-1}\cdot 1 = f^{-1}\cdot \mathrm{id} - \int \mathrm{id}\cdot (f^{-1})'$$

trükk sokszor alkalmas arra, hogy az inverz függvények integrálját parciálisan kiintegráljuk, hiszen az inverz függvények deriváltjának képlete az utolsó tényez?t a kezünkre játssza. Speciálisan a módszer alkalmas az összes ln, arc és ar függvény kiintegrálására.

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = \int \arcsin(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x = x\cdot\arcsin(x) - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\cdot\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$