A T= $J_1 \times J_2$ korlátos és zárt téglalap egy **Riemann-felosztás**án nem mást értünk mint egy olyan kiválasztófüggvényt, mely a T-t unióként el?állító, egymásba nem nyúló tengelyekkel márhuzamos oldalú téglalapokból álló halmaz minden egyes eleméhez egy az adott elemben lév? elemet rendel, azaz egy olyan függvényt, melyre:

1. Dom( ) minden *I* eleme tengelyekkel párhuzamos oldalú zárt téglalap, melyek egymásba nem nyúlnak, uniójuk T
2. minden *I* Dom( ) esetén $\eta(I) \in I$.

A T összes **Riemann-felosztásai halmazát** RF(T) jelöli. Azon Riemann-felbontások halmazát, amelyekben az összes elem területe (oldalhosszainak szorzata) kisebb egy > 0 pozitív számnál, RF (T) jelöli, ezt a halmazt a T összes **-nál finomabb Riemann-felosztásának** nevezük.

Egy *f*, az T-n értelmezett és **R**-be képez? függvény egy felosztáshoz tartozó **Riemann-közelít? összegén** a

$$\sigma_f(\eta) = \sum_{I \in \mathrm{Dom}(\eta)} f(\eta(I)) \cdot |I|$$

Ekkor már definiálhatjuk az Riemann-integrálhatóságot:

Definíció. Legyen *f*:T $\longrightarrow$ **R**egy zárt és korlátos téglán értelmezett függvény. Azt mondjuk, hogy *f* **Riemann-integrálható** és integrálja az A valós szám, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \eta \in \mathrm{RF}_\delta(T))(|\sigma_f(\eta) - A| < \varepsilon)$$

Belátható, hogy ha *f* integrálható, akkor A egyértelm? és ekkor ennek a számnak a jelölésére az

$\int_T f$, vagy az $\int_{T_{x,y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

szimbólum szolgál.

A T téglalapon Riemann-integrálható függvények halmazát R(T) jelöli.

Az integrál lényegében a függvény grafikonja alatti térfogat. Integrálható függvény esetén létezik ez a térfogat, azaz a Riemann-felosztást egyre finomabbra véve, a Riemann-közelít? összeg minden el?re megadott legnagyobb eltérésnél közelebb kerül A-hoz.

Világos, hogy ha egy függvény integrálható, akkor minden résztégláján is integrálható (hisz ekkor azokat a felosztásokat kell venni, amik a részintervallumon belül is felosztások, és persze ezek szerint is képezve a határátmenetet, létez? határértéket kapunk).

Egy kompakt K halmazon értelmezett f függvény integrálja nem más, mint tetsz?leges a K-t tartalmazó T tégla esetén az

$$\hat{f} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \in T \setminus K \\ f(x), & \text{ha} \quad x \in K \end{cases}$$

függvény integrálja T-n, ha ez létezik.

Tartalomjegyzék

A Riemann-inregrálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Bár a Riemann-integrálhatóság általában könnyen kezelhet? fogalom, a következ? tétel bizonyításához azonban a klasszikus analízis szinte összes eszközét be kell vetni. Nem csoda, hogy csak 1905-ben fogalmazhatta meg Lebesgue, egy tágabb perspektívából szemlélve a Riemann-integrált.

Tétel. Legyen *f*: T $\longrightarrow$ **R** korlátos és zárt téglán értelmezett függvény. *f* pontosan akkor Riemann-integrálható, ha korlátos, és szakadási helyeinek halmaza Lebesgue-nullmérték? halmaz, azaz

$$f\in \mathrm{R}(T)\ \Leftrightarrow\ (f\in \mathrm{B}(T)\ \wedge\ \mathrm{m}(\mathrm{discon}(f))=0)$$

Itt Lebesgue-nullmérték?nek nevezünk egy *H* **R**^{N} halmazt, ha minden > 0-hoz létezik olyan (I_n) téglasorozat, hogy ennek össztérfogata < és lefedi *H*-t.

Biztos nem nullmérték? például egy nemelfajuló intervallum, mert annak a mértéke az intervallum nemnulla hossza. De véges halmaz nullmérték?, mert lefedhet?, egy határértékben elt?n? intervallumsorozat-rendszerrel. Belátható, hogy megszámlálható pont nullmérték? halmazt alkot. Konkrétan, könyen belátható, hogy az 1/n pontjai nullmérték? halmazt alkotnak.

Világos, hogy a Dirichlet-függvényes példa azért jó ellenpélda, mert ez a függvény [0,1]-en mindenhol szakad, azaz discon(Dir)=[0,1], melynek a mértéke 1.

Példa. Felvet?dik a kérdés: van-e konitinuum sok helyen szakadó, Riemann-integrálható függvény. A válasz igenl?. (Lásd: az **ördög lépcs?je** függvényt)

A Riemann-integrálhatóság néhány kritériuma

Részletezünk néhány hasznos esetet a fenti tételb?l.

1. $f\in \mathrm{R}(T)\ \Rightarrow\ f\in \mathrm{B}(T)$

   csak korlátos függvények R-intgrálhatóak
2. $f\in \mathrm{R}(T)\ \Leftarrow\ f\in \mathrm{C}(T)$

   (Cauchy) világos: ha folytonos, akkor nincs szakadási pontja, és korlátos a Weierstrass-tétel miatt

Kétváltozós függvény integráljának kiszámítása

Ha *f*:[a,b]×[c,d]$\longrightarrow$ **R** intergálható, akkor

1. minden *x*-re a

$$F(x) = \int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in [a,b]$$

függvény is integrálható és

2. $$\int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f$$

Ugyanis, ha ekkor *f* korlátos, és L.-0-mérték? a szakadásainak halmaza. Emiatt az f(x,.) függvények is ilyenek, melyek integrálja folytonos a [c,d] intervallumon, amib?l korlátos is, tehát integrálható.

Másrészt,

Paraméteres integrál integrálhatóságának kritériuma

Legyen f:[a,b]×[c,d]⟶ **R** folytonos. Ekkor az

$$F(y) = \int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x, \qquad y \in [c,d]$$

létezik mert az integrandusa folytonos. Mi több, maga is folytonos.

Ugyanis,

$$F(y) - F(y_0) = \int\limits_{x=a}^{b} f(x,y) - f(x,y_0)\,\mathrm{d}x$$

Legyen > 0 tetsz?leges. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért létezik >0, hogy ha |(x,y)-(x,y_0)| < , akkor

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ekkor viszont

$$|F(y) - F(y_0)| \leq \int\limits_{x=a}^{b} |f(x,y) - f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Tehát F(y) folytonos (egyenletesen) és így integrélható egyváltozós függvény, azaz létezik:

$$A = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Ez alapot ad az integrál kiszámítására: az f(x,y) kétváltozós függvény intergálja tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalap alakú tartományon nem függ az integrálás sorrendjét?l. Ezesetben a "http://wiki.math.bme.humásik változót"http://wiki.math.bme.hu mindig konstansnak vesszük:

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Tétel. Ha f:[a,b]×[c,d]⟶ **R** integrálható, minden *y*   [c,d]-re $x \mapsto f(x,y)$ is integrálható és $F: y \mapsto \int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)$ is integrálható, akkor $\int f = \int\limits_{c}^{d} F$.

Bizonyítás. Legyen   >0. Legyen *A* olyan, hogy

$$\int\limits_{c}^{d} F = A$$

Ekkor   /2-höz létezik olyan   >0, hogy [c,d]-nek minden   -nál finomabb $_J$ Riemann-felosztására:

$$\left| \sum_J F(\eta_J)|J| - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De ekkor létezik a   /2(d-c)-hez és minden J-re olyan   '>0, hogy [a,b]-nek minden   '-nál finomabb $_I$ Riemann-felosztására:

$$\left| \sum_I f(\xi_I, \eta :_J)|I| - F(\eta_J) \right| < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

Viszont ekkor

$$\left| \sum_I \sum_J f(\xi_I, \eta_J)|J||I| - \sum_J F(\eta_J)|J| + \sum_J F(\eta_J)|J| - A \right| = \left| \sum_J (\sum_I f(\xi_I, \eta_J)|I| - F(\right.$$