A dimenziótétel az lineáris leképezések magterének és képterének dimenziója közötti szoros (kiegészít? jelleg?) kapcsolatra mutat rá. Most csak az $\mathcal{L}$ ($\mathbf{R}^n$;$\mathbf{R}^m$) leképezéseket vizsgáljuk (a tétel bármely végesdimenziós vektortérb?l tetsz?leges vektortérbe men? lineáris függvényre is igaz.)

Magtér

Az $\mathbf{A}$: $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés magtere:

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) =_{\mathrm{def}} \{v \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{A}v = 0\}$$

világos, hogy ez altér. Ugyanis altér jelemzhet? úgy, mint olyan részhalmaz a térben, mely zárt az összeadásra és a skalárral történ? szorzásra. De Ker($\mathbf{A}$) ilyen, mert *tetsz?leges u*, *v* vektorra

$$\mathbf{A}v = 0 \,\wedge\, \mathbf{A}u = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}v + \mathbf{A}u = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}(v+u) = 0$$

és

$$\mathbf{A}v = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda.(\mathbf{A}v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}(\lambda.v) = 0$$

Bázisát ($\mathbf{R}^n$-ben) például az $\mathbf{A}$ leképezés [$\mathbf{A}$] mátrixának Gauss-eliminációjával és az [$\mathbf{A}$]x=0 homogén egyenletrendszer megoldásával nyerhetünk (példa itt).

Képtér

Az $\mathbf{A}$: $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés képtere:

$$\mathrm{Im}(\mathbf{A}) =_{\mathrm{def}} \{\mathbf{A}v \in \mathbf{R}^m \mid v \in \mathbf{R}^n\}$$

világos, hogy ez altér. Ugyanis *alkalmas v* és *u* vektorokkal:

$$\mathbf{A}v + \mathbf{A}u = \mathbf{A}(v+u)$$

és

$$\lambda.(\mathbf{A}v) = \mathbf{A}(\lambda.v)$$

Bázisát ($\mathbf{R}^n$-ben) például úgy nyerünk, hogy a $\mathbf{A}$ leképezés [$\mathbf{A}$] mátrixának oszlopvektorai közül Gauss-eliminációval kiválasztjuk a legtöbb vektort tartalmazó lineárisan független rendszert (példa itt).

Tétel és bizonyítás

Dimenziótétel. Ha $\mathbf{A}$: $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés, akkor

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) + \dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}) = n$$

Bizonyítás. Ha vesszük Ker($\mathbf{A}$) egy

$$B = \{b_1, ..., b_k\}$$

bázisát (Ker($\mathbf{A}$) dimenziója tehát *k*) akkor világos, hogy a báziselemek képei által kifeszített

$$\langle \mathbf{A}b_1, \mathbf{A}b_2, ..., \mathbf{A}b_k \rangle$$

altér az **R**^{m}-beli triviális {0} altér. Világos, hogy ha veszük egy Ker(**A**)-n kívüli c vektort, akkor ez már nem képez?dhet a {0}-ba. Megfogalmazhatjuk tehát azt a sejtést, hogy ha B-t kib?vítíjük **R**^{n} bázisává, mondjuk a

$$C = \{c_1, ..., c_l\}$$

független vektorrendszerrel, akkor C elemeinek képei Im(**A**) bázisát fogja adni. Ezt fogjuk igazolni, azaz hogy

$$\langle \mathbf{A}c_1, \mathbf{A}c_2, ..., \mathbf{A}c_l \rangle = \mathrm{Im}(\mathbf{A})$$

és ami a tétel állítását igazolja: Im(**A**) dimenziója pont *l*.

1. El?ször belátjuk, hogy { **A**c_1, **A**c_2, ...,**A**c_l } generátorrendszere Im(**A**)-nak. Legyen

$$v = \mathbf{A}u$$

Mivel *B* + *C* bázisa **R**^{n}-nek, ezért *u* el?áll (egyértelm? módon)

$$u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_k b_k + \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + ... + \mu_l c_l$$

alakban. De *u* képében a B-beliekkel el?állíthatók a {0}-ba mennek, így már a C-b?l jöv? képek is el?állítják **A**u-t:

$$\mathbf{A}u = \mathbf{A}(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_k b_k) + \mathbf{A}(\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + ... + \mu_l c_l) =$$

$$= 0 + \mathbf{A}(\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + ... + \mu_l c_l)$$
$$= \mu_1 \mathbf{A}c_1 + \mu_2 \mathbf{A}c_2 + ... + \mu_l \mathbf{A}c_l$$

2. Belátjuk, hogy { **A**c_1, **A**c_2, ...,**A**c_l } független vektorrendszer is, tehát dimenziója *l*.

Tegyük fel, hogy vannak $_1$, $_2$, ..., $_l$ számok, melyekkel

$$\nu_1 \mathbf{A}c_1 + \nu_2 \mathbf{A}c_2 + ... + \nu_l \mathbf{A}c_l = 0$$

A függetlenséghez az kell, hogy $_1$, $_2$, ..., $_l$-k mind nullák legyenek. Természetesen a bal oldalon kiemelhetünk **A**-t, tehát:

$$\mathbf{A}(\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + ... + \nu_l c_l) = 0$$

Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy ha az

$$u = \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + ... + \nu_l c_l$$

rövidítéshez folyamodunk, akkor

$$u \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$$

azaz az *u* vektor B-beli elemekkel is és C-beli elemekkel is el?állítható. De ez csak úgy lehet, hogy *u*=0, ami pedig csak akkor van, ha a $_1$, $_2$, ..., $_l$ számok mind nullák.

Mindez azt jelenti, hogy { $\mathbf{A}c_1$, $\mathbf{A}c_2$, ...,$\mathbf{A}c_l$ } bázis, amib?l következik, hogy az általa kifeszített altér dimenziója *l*. De a kifeszített altér pont Im(**A**), így azt kaptuk, hogy

$$\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{A})) = n - k$$

vagyis, amit be akartunk látni.

Megjegyzés. Világos, hogy a fenti bizonyításban a B által generál altér és a C által generált altér közös része a {0} (vagyis csak a 0-t állítják el? mindeketten). Ugyanis, ha lenne $v \neq 0$, hogy

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_k c_k$$

és közben

$$v = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + ... + \mu_k c_k$$

akkor mindkét egyenletben a skalárok között lenne nemnulla, és a két egyenletet kivonva egymásból hpnánk, hogy a 0 vektor el?áll olyan B és C-beli elemek lineáris kombinációjaként, ahol az együtthatók között van nemnulla. Ez viszont az jelentené, hogy B + C nem független rendszer (holott B + C a B egy kib?vítése az $\mathbf{R}^n$ bázisává).

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{R}^n$ vektorteret el?állítottuk a B által kifeszített és a C által kifeszített alterek **direkt összeg**eként:

$$\mathbf{R}^n = \langle B \rangle \oplus \langle C \rangle$$