Cauchy-féle gyökkritérium

Tétel. Legyen (a_n) valós számsorozat, $\sum(a_n)$ pedig a bel?le képezett sor. Ekkor

- ha $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}<1$, akkor $\sum(a_n)$ abszolút konvergens
- ha $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}>1$, akkor $\sum(a_n)$ divergens

Bizonyítás

1. Legyen

$$c_n = \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ekkor *s* = limsup(c_n) a lismesz szuperrior fogalmának deifíciója szerint az $|a^n|$ sorozat elemeinek n-edik gyökeinek (c_n) sorozatának legnagyobb s?r?södési pontja. S?r?södési pont, azaz *s* minden környezetében van a (c_n) sorozatnak végtelen sok eleme, és a legnagyobb, mert nincs nála nagyobb s?r?södési helye (c_n)-nek.

s < 1 miatt vehetünk egy *q* számot úgy, hogy

$s < q < 1$

Ekkor *s* "http://wiki.math.bme.hulimsupsága"http://wiki.math.bme.hu miatt egy adott *M* természetes számot követ? minden *n*-re:

$$c_n < q$$

hiszen ha lenne végtelen sok elem, melyre ez nem telhesülne, akkor lenne *s* nél nagyobb s?r?södési pont is. Tehát

$$\sqrt[n]{|a_n|} < q$$

azaz

$$|a_n| < q^n$$

De a (q^n) mértani sorozatból képezett sor konvergens (hisz |q|<1), így a majoráns kritérium miatt a

$$\sum |a_n|$$

sor is konvergens (merthogy a szóbanforgó mértani sor majorálja). Eszerint $\sum(a_n)$ abszolút konvergens.

2. A másik esetben, minthogy *s* = limsup(c_n), van olyan részsorozata (c_n)-nek melynek minden eleme 1-nél nagyobb egyenl?:

$$c_{n_k} \geq 1$$

ekkor viszont

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq 1$$

és

$$|a_{n_k}| \geq 1$$

de a szükséges kritérium miatt ha (a_n) (és vele együtt az összes részsorozata) nem a 0-hoz tart, akkor $\sum(a_n)$ nem konvergens, márpedig a fenti olyan részsorozata (a_n)-nek, mely nem tarthat a 0-hoz, így $\sum(a_n)$ nem konvergens.

Megjegyzések. A bizonyításból kiderül, hogy a tétel állításának második pontjánál többet is állíthatunk. Ha ugyanis van olyan részsorozata (c_n)-nek melynek minden eleme 1-nél nagyobb egyenl?, már akkor is állíthatjuk, hogy $\sum(a_n)$ nem konvergens. Ám az nem igaz, hogy ha $\limsup(c_n) \geq 1$, akkor $\sum(a_n)$ nem konvergens, ellenpélda az

$$\sum(\tfrac{1}{n^2})$$

sor. Ez konverges, holott az n-edik gyökök sorozatának limesz szuperiorja 1.

Az el?bb említett általános divergencia kritériumon túl azonban csak azt mondhatjuk, hogy ha $\limsup(c_n) = 1$, akkor további vizsgálatokat kell végeznünk, hogy döntésre juthassunk a konvergencia/divergencia kérdésében.