Tétel ? *Bolzano-tétel* ? Intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értékeket is felve? folytonos függvénynek van zérushelye.

a Bolzano-tételt még olymódon is szokás kimondani, hogy

> *intervallumon értelmezett folytonos függvény két függvényértéke között minden értéket fölvesz*

melyet Darboux-tulajdonságnak neveznek. A Bolzano-tétel lényegében azt mondja ki, hogy az intervallumon folytonos függvények Darboux-tulajdonságúak. Megjegyezzük, hogy a Darboux-tétel pedig azt mondja ki, hogy az intervallumon differenciálható függvények deriváltfüggvénye Darboux-tulajdonságú.

Tétel ? *Weierstrass-féle minimum-maximum-elv* ? Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi abszolút minimumát és maximumát.

Az alábbiakban felhasználjuk a kompaktság fogalmát.

(*Kompakt* egy *K* halmaz, ha minden nyílt halmazrendszerb?l, melynek uniója lefedi *K*-t kiválasztható véges sok nyílt halmaz is, melyek véges uniója még mindig lefedi *K*-t.)

Tétel (*Weierstrass*) Valós érték?, kompakt halmazon folytonos függvény felveszi minimumát és maximumát.

> Azaz ha *K* $\mathbf{R}^N$ kompakt és *f*   C(*K*,**R**), akkor sup(*f*), inf(*f*)   Ran(*f*)

Bizonyítás. 1) El?ször belátjuk, hogy kompakt halmazon folytonos függvény korlátos. Legyen ugyanis az =1 és *f* értelmezési tartománya *K*. A folytonosság miatt *K* minden *u* eleméhez létezik (*u*) pozitív szám, hogy *f* a B (*u*) környezeten belül mindvégig az (*f*(*u*)-1;,*f*(*u*)+1) intervallumon belül marad. Ekkor a nyílt halmazokból álló

$$\{\mathrm{B}_\varepsilon(u)\}_{u\in K}$$

rendszer lefedi *K*-t, vagyis a Heine-Borel-tétel miatt már ebb?l véges sok is lefedi, azaz létezik *V*   *K* véges, hogy

$$K\subseteq\bigcup_{u\in V}\mathrm{B}_{\delta_u}(u)$$

Ezek képei lefedik Ran(f)-et:

$$f(K)\subseteq\bigcup_{u\in V}f(\mathrm{B}_{\delta_u}(u))\subseteq\bigcup_{u\in V}\{\mathrm{B}_1(f(u))$$

Ez utóbbi a folytonosság miatt, tehát *f* képét véges sok korlátos intervallum lefedi, azaz korlátos.

2) Belátjuk, hogy *f* felveszi a szuprémumát (és ugyanígy az infimumát is). Legyen *S* := sup(*f*) (azaz *f* értékkészletének legkisebb fels? korlátja). Ekkor a *g* : *K* $\longrightarrow$ **R**, *x* $\longmapsto$ *S*-*f*(*x*) függvény nemnegatív értékeket vesz föl. Ha *f* nem venné fel a szuprémumát, akkor *g* pozitív lenne. Ekkor értelmezhet? lenne a

$$h:K\to\mathbf{R};x\mapsto\frac{1}{S-f(x)}$$

függvény. *h* mert folytonos függvényekb?l van folytonosságot meg?rz? módon összetéve. Az 1) pont szerint korlátos is, ami azonban ellentmond annak, hogy *S* a szuprémum. Ugyanis S = sup Ran(*f*) azt jelenti, hogy minden 1/n alakú számra van x_n *K*, hogy | $S - f(x_n)$ | < 1 / *n*, azaz van olyan *K*-beli x_n sorozat, melynek képsorozata *h* által a végtelenbe tart, azaz *h* nem korlátos.

Tétel (*Bolzano*) Összefügg? halmaz folytonos képe összefügg?.

(Ha *f*   C($\mathbf{R}^n$,$\mathbf{R}^m$), Dom(*f*) ívszer?en összefügg?, akkor Ran(*f*) is ívszer?en összefügg?.)

Bizonyítás. Az ívszer? összefügg?ségb?l és a folytonos függvények kompozíciójára vonatkozó tételb?l.

Azt mondjuk, hogy az *f*: $\mathbf{R} \supset\!\!\!\rightarrow \mathbf{R}$ függvény folytonos az értelmezési tartománya egy *u* pontjában, ha

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f))(|x - u| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(u)| < \varepsilon)$$

Folytonos egy függvény, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos

Legyen *f* egy az *A*   **R** halmazon értelmezett, **R**-be képez? függvény. Legyen $u\in\overline{\mathbf{R}}$ az *A* torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f*-nek a $v\in\overline{\mathbf{R}}$ elem **határértéke** az *u*-ban, ha

minden   > 0 esetén létezik olyan   > 0, hogy minden *x*   *A*   B (*u*)\{u}-re *f*(*x*)   B (*v*)

ahol természetesen a +   és -   környezetei a már említett módon értend?k.

Ebben az esetben a határérték egyértelm? és jelölése:

$$\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{u} f = v$$

Folytonosság és határérték kapcsolata

A folytonosságot, csak az értelmezési tartomány pontjaiban nézhetünk, hisz a definícióban f(u) is szerepel. Ellenben határértéket akár azon kívüli is nézhetünk (s?t!). Mégis, a két fogalom között szoros kapcsolat van:

1. Tétel. -- Folytonos függvény határértéke a helyettesítési értéke -- Legyen az *u* az *f* értelmezési tartományában. Ekkor a következ?k ekvivalensek egymással:

1. *f* folytonos *u*-ban
2. *u* izolált pontja Dom(*f*)-nek, vagy *u* torlódási pontja Dom(*f*)-nek, létezik *u*-an határértéke és $\lim_u f$ = f(*u*)

2. Tétel. -- Véges helyen véges határérték? függvény folytonossá tehet? -- Legyen *u* a Dom(*f*) véges torlódási pontja és *v* véges (**R**-beli) szám. Ekkor a következ?k ekvivalensek.

1. $\exists \lim_{u} f = v$
2. létezik az *f*-nek olyan $\overline{f}$ *u*-ban folytonos kiterjeszétse (vagy módosítása), hogy $\overline{f}|_{\mathrm{Dom}(f)\setminus\{u\}} = f|_{\mathrm{Dom}(f)\setminus\{u\}}$ és $\overline{f}(u) = v$

Definíció Legyen *D* $\mathbf{R}^N$, f: $D \longrightarrow \mathbf{R}^M$, *A* $\mathbf{R}^M$, *u* $\mathbf{R}^N$ torlódási pontja *D*-nek. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az *u* pontban az *A*, ha   >0   >0 x *D* x   B (u) $\Longrightarrow$ B (A)

Az, hogy a határérték az *u*-ban *A* azt jelenti, hogy a függvénynek folytonos kiterjesztése *u*-ban az f(u) = A hozzárendelés.

Lényeges, hogy tudjuk annak jellemzését, hogy egy pontban a határérték nem létezik. Ehhez a Heine-féle határértékfogalmat használjuk:

Tétel. Legyen *D* $\mathbf{R}^N$, f: *D* $\longrightarrow$ $\mathbf{R}^M$, *A* $\mathbf{R}^M$, *u* $\mathbf{R}^N$ torlódási pontja *D*-nek. Ekkor az alábbi két kijelentés ekvivalens egymással:

1. létezik $\lim_u f = A$,
2. $(\forall (a_n) \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{u\}^{\mathbf{Z}^+})(a_n \to u \quad \Rightarrow \quad f(a_n) \to A)$

Ezzel megfogalmazhatjuk annak a feltételét, hogy nem létezik a határérték:

Tétel. Legyen *D* $\mathbf{R}^N$, f: *D* $\longrightarrow$ $\mathbf{R}^M$, *A* $\mathbf{R}^M$, *u* $\mathbf{R}^N$ torlódási pontja *D*-nek. *f*-nek nincs határértéke *u*-ban, ha

> létezik olyan $(a_n) \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{u\}^{\mathbf{Z}^+}$ sorozat, hogy bár $a_n \to u$, de ($f(a_n)$) nem konvergens.