Definíció ? **Egyenletesen folytonos**nak mondunk egy *f*: $H \longrightarrow$ **R** függvényt a **H** **R halmazon**, ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in H \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Tétel ? *Heine-tétel* ? Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. A Heine?Borel-tételt fogjuk használni. Legyen f: [a,b] $\longrightarrow$ **R** korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény. Megadunk [a,b]-nek egy nyílt lefedését. Legyen > 0. Ekkor a pontbeli folytonosság definíciója szerint minden egyes *u* [a,b] ponthoz létezik olyan u > 0 pozitív szám, hogy:

$$f(\mathrm{B}_{\delta_u}(u)) \subseteq \mathrm{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(u))$$

azaz minden x-re, ha | x - u | < u akkor | f(x)-f(u) | < /2. Legyen tehát :

$$H = \{\mathrm{B}_{\frac{\delta_u}{2}}(u) \mid u \in [a,b]\}$$

egy nyílt lefedése [a,b]-nek. A Heine?Borel-tétel szerint létezik véges eleme is, melyek még mindig lefedik [a,b]-t, azaz van *V* [a,b] véges ponthalmaz, hogy

$$K = \{\mathrm{B}_{\frac{\delta_u}{2}}(u) \mid u \in V\}$$

A véges sok /2 közül válasszuk a minimálisat:

$$\delta := \min\{\frac{\delta_u}{2} \mid u \in V\}$$

Minden x,y H-ra, ha |x-y| < , akkor egyfel?l az x benne van egy u V középpontú K-beli intervalumban, másrészt:

$$|y - u| \leq |y - x| + |x - u| < \delta + \frac{\delta_u}{2} \leq \frac{\delta_u}{2} + \frac{\delta_u}{2} = \delta_u$$

Ezért a folytonosság miatt:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(u)| + |f(u) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

QED

Egyenletes folytonosságra bizonyos esetekben következtethetünk nem csak zárt és korlátos esetben is.

Korlátos derivált

Ha az *f* intervallumon értelmezett differenciálható függvény korlátos deriválttal rendelkezik, akkor a Lagrange-féle középértéktétel miatt *f* egyenletesen folytonos az értelmezési tartományán. Ugyanis legyen *K* olyan pozitív szám, hogy minden x Dom(*f*)-re:

$$|f'(x)| \leq K$$

Ha > 0 és := /*K*, akkor minden x,y Dom(*f*)-re, ha |x-y| < , létezik az x és az y között, hogy azzal:

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\cdot|x-y|<K\cdot\delta=\varepsilon$$

Példa. Az

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

egyenletesen folytonos az [1,+) halmazon.

Ugyanis, itt korlátos a deriváltja:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

Ezért ha x [1,+), akkor

$$\left|-\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{x^2}\leq 1$$

Folytonosan kiterjeszthet? függvény

Ha I korlátos, nyílt intervallum és az *f* I-n folytonos függvénynek létezik véges határértéke az I végpontjaiban, akkor világos, hogy az I lezártja már korlátos és zárt és az *f* folytonos kiterjesztésére alkalmazható a Heine tétele, amib?l következik, hogy f is függvény egyenletesen folytonos (hiszen ugyanaz a delta jó lesz az f-hez is, mint a kiterjesztéséhez).

Példa. A (0,1)-en értelmezett

$$f(x)=\sqrt{x}$$

egyenletesen folytonos a (0,1) intervallumon.

Ugyanis, f folytonosan kiterjed a [0,1] zártra.

Ennél a példánál a korlátos deriváltra nem is hivatkozthattunk volna, mert

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

nem is korlátos (0,1)-en.

Megjegyezzük, hogy ez az állítás akkor is érvényben marad, ha azt tesszük fel, hogy I akármilyen intervallum, f folytonos és az értelmezési tartománya határpontjaiban létezik és véges a határértéke.

Továbbá bizonyos értelemben ennek az állításnak a megfordítása is igaz. **Tétel** Ha f egyenletesen folytonos, akkor egyenletesen folytonosan kiterjeszthet? az I lezártjára. Ez folytonosságra nem igaz, mondjunk ellenpéldát!