Deriváltak, differenciálási szabályok

Definíció. Az f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ függvény deriváltfüggvényén értjük a

$$f' :\ \{x \in \mathrm{Dom}\, f \mid f\ \text{"diff.hato } x\text{-ben"}\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto f'(x)$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Linearitás

A hozzáadott konstans szabálya: $(f+c)' = f'$
A konstans szorzó szabálya: $(cf)' = cf'$
Linearitás: $(af+bg)' = af' + bg'$

Szorzat és hányados

$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Összetett függvény

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$
$$(f \circ g \circ h)' = (f' \circ g \circ h)(g' \circ h)h'$$

L'Hospital-szabályok

Tétel -- Gyenge L'Hospital-szabály -- Legyenek f és g: $A \longrightarrow$ **R** valós-valós függvények, u A A ', f(u)=g(u)=0, mindkett? differenciálható u-ban és g'(u) ≠ 0. Ekkor létezik a $\lim_u(f/g)$, és

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

Ugyanis,' írjuk fel az 1. definíciónak megfelel?en a határértéket. Létezik az u-hoz olyan , : $A \longrightarrow$ **R**, hogy minden x A Dom(f/g)-ra

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(u) + f'(u)(x-u) + \varepsilon(x)(x-u)}{g(u) + g'(u)(x-u) + \eta(x)(x-u)}$$

és $\lim_u$ = (u)=0, $\lim_u$ = (u)=0. Emiatt és *f*(u)=*g*(u)=0 miatt

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(u)+\varepsilon(x)}{g'(u)+\eta(x)}$$

Aminek a határéttéke, ha *x* tart *u*-hoz a kívánt hányados, amennyiben ellen?rizük, hogy g'(u) + nem lesz nulla egy elég sz?k környzeteben. Ekkor ugyanis a hányadosnak nem lenne értelme. Nos, | | egy elég kis környzetben a nulla |g'(u)|/2 sugarú környzetében lesz, így ez a veszély nem fenyeget.

Amikor nem m?ködik az ismételt L'Hospitálás

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{1-\cos x}=?$$

Amikor nem m?ködik az ismételt L'Hospitálás

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}+e^{\frac{3}{x}}}=?$$

A derivált szakadásai, Darboux-tétel Intervallumon deriválható függvény deriváltjának nem lehet megszüntethet? szakadása. (Ellenben lehet korlátos másodfajú és a végtelen másodfajú szakadása.)

Állítás. Ha *f*:[a,b] $\longrightarrow$ **R** folytonos a-ban, differenciálható a nyílton és létezik a derivált határértéke a-ban és ez véges szám, akkor *f*-nek *létezik* a deriváltja a-ban (és a deriváltja a $\lim_a$ f' szám).

Bizonyítás. Ez az er?s L'Hospital-tétel következménye. Tekintsük a különbségi hányados függvényt, legyen a L'H-beli számláló az x $\longmapsto$ f(x)-f(a), a nevez? az x $\longmapsto$ x-a. Világos, hogy a-ban 0/0 alakú, így alkalmazható a L'H-szabály. Ekkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to a}f'(x)$$

azaz *létezik* a pontbeli derivált és ez a derivált határértéke. QED

A deriváltfüggvénynek nem lehet ugrása sem:

Tétel ? *Darboux-tétel* ? Ha *f*:I $\longrightarrow$ **R** differenciálható, akkor f' Darboux-tulajdonságú (két deriváltérték között a deriváltfüggvény minden értéket fölvesz).

Bizonyítás. Legyen [a,b] I és tegyük fel, hogy f'(a) < m < f'(b) tetsz?legesen rögzített m-re. Belátjuk, hogy van olyan (a,b), hogy f'( ) = m. Transzformáljuk el a függvényt, vonjuk ki bel?le az x $\longmapsto$ mx lineárist:

$$g(x):=f(x)-mx,\qquad x\in[a,b]$$

g differenciálható, és olyan, hogy tetsz?leges x-re:

$$g'(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad f'(x)=m$$

A feladat tehát, hogy keressünk zérushelyet g'-nek. Ehhez elég, ha találunk g értelmezési tartományának belsejében széls?értéket, mert akkor a Fermat-féle széls?értéktétel miatt ott a derivált nulla lesz. Az [a,b] zárton a folytonos *g* a Weierstrass-tétel miatt felveszi a széls?értékeit. Tehát készen vagyunk, amennyiben létezik széls?érték az (a,b) nyílton. A továbbiakban ezt bizonyítjuk.

Vizsgáljuk a g-t az *a*-ban. g'(a) < 0, ezért

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$$

Ekkor természetesen egy valamely >0-ra minden x (a,a+)-re

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$$

és innen

$$g(x)<g(a)$$

vagyis *a*-ban nem lehet g-nek minimuma. De ugyanilyen érveléssel g'(b) > 0 miatt valamely >0 számmal ha x (b- ,b), akkor x-b < 0 és

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to b}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}<0\\&\frac{g(x)-g(b)}{x-b}>0\qquad /\cdot(x-b)\quad(<0)\\&g(x)<g(b)\end{aligned}$$

azaz *b*-ben sem lehet minimum. Viszont ez azt jelenti, hogy a Weierstrass-tétel által garantált minimum csak az (a,b) nyíltban lehet. QED