

Inverzfüggvénytétel \mathbf{R} -re

Inverzfüggvény deriváltja. Ha az f invertálható függvény differenciálható u -ban, f^{-1} folytonos u -ban és $f'(u) \neq 0$, akkor az inverz is differenciálható u -ban és

$$(f^{-1})'(f(u)) = \frac{1}{f'(u)}$$

Megjegyzés. A tételi állításban az inverz folytonossági feltétele csak olyan esetben jelent megszorítást, amikor a függvény nem intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény. Példa olyan invertálható függvényre, melynek deriváltja nem nulla egy adott pontban, de inverze a képpontban nem folytonos:

$$\text{Dom } f = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \notin \mathbf{Z}^+ \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } x = n \in \mathbf{Z}^+ \end{cases}$$

f ekkor a 0-ban deriválható és $f'(0)=1$, invertálható, mert $\mathbf{R} \setminus (1/\mathbf{Z}^+) \setminus \mathbf{Z}^+$ -n az identitás és az \mathbf{Z}^+ -n pedig az $1/id$, mely értékei vétetnek fel az $\mathbf{R} \setminus (1/\mathbf{Z}^+)$ - halmaz képeiként. Viszont így f^{-1} nem korlátos 0-ban, azaz nem folytonos, így nem is differenciálható.

Állítás. Intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény inverze folytonos (tehát ez esetben még akkor is folytonos az inverz, ha a függvénynek magának ugrása van).

Erre a meglep? eredményre egy illusztráló példát adunk.

Példa. Folytonosan invertálható-e az alábbi függvény? Indokoljuk a fenti tétel nélkül!

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^2 + 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Megoldás. Persze, hisz a negatívokon invertálható és csak negatív értéket vesz fel. A pozitívokon szintén és szintén csak pozitív értékeket vesz fel. A 0-beli érték az el?z? képhalmazokon kívül esik (a 0). Az inverz:

$$\text{Dom } f^{-1} = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{-y-1}, & \text{ha } y < -1 \\ 0, & \text{ha } y = 0 \\ \sqrt{y-1}, & \text{ha } y > 1 \end{cases}$$

Ez a függvény mindenütt folytonos, mert a gyök az, és a 0-ban izolált pontja van, ahol a függvények triviálisan folytonosak.

Tétel -- Globális inverzfüggvény-tétel -- Ha $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ függvény folytonosan differenciálható és f' sehol se nulla, akkor

1. f invertálható
2. f inverze folytonos (f homeomorfizmus)

3. f inverze deriválható (f diffeomorfizmus)

4. minden $x \in I$ -re

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Megjegyzés. Részletesebb indoklás azt is kimutatja, hogy a derivált folytonossága nem szükséges (bár nem árt :).

Bizonyítás. 1) A derivált mindenhol azonos eljelű, ellenkező esetben lenne két hely, ahol különbözik, de a Darboux-tétel miatt akkor lenne zérushelye is a deriválnak, ami ellentmond a feltételeknek. Tehát f szigorúan monoton, így invertálható.

2) Minden $a \in I$ pontban a derivált nem nulla és folytonos, így létezik olyan környezete, melyben a derivált mindenhol egy L pozitív számnál nagyobb. Ezért a Lagrange-tétel miatt a környezet bármely két x_1, x_2 pontjára:

$$0 < L \leq f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Emiatt az $x=f^{-1}(y)$ áttéréssel:

$$L \leq \left| \frac{x_1 - x_2}{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)} \right|$$

azaz

$$\frac{1}{L} |y_1 - y_2| \geq |f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)|$$

azaz az inverz Lipschitzes a környezetben, azaz a pontban folytonos. 3) 4) ezt egyszerre igazoljuk. Az u -beli differenciálhatóság miatt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(u) &= f'(u)(x - u) + \varepsilon(x)(x - u) \\ f(x) - f(u) &= (f'(u) + \varepsilon(x))(x - u) \quad (x = f^{-1}(y), \quad u = f^{-1}(v)) \\ y - v &= (f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y)))(f^{-1}(y) - f^{-1}(v)) \\ \frac{1}{f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y))} (y - v) &= f^{-1}(y) - f^{-1}(v) \\ \frac{1}{f'(u)} (y - v) + \left(\frac{1}{f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y))} - \frac{1}{f'(u)} \right) (y - v) &= f^{-1}(y) - f^{-1}(v) \end{aligned}$$

Itt az

$$\eta(y) = \frac{1}{f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y))} - \frac{1}{f'(u)}$$

függvény akkor lesz folytonos és v -ben eltérő, ha maga f^{-1} is folytonos v -ben.

Példa. Igazoljuk, hogy létezik a \sin inverze a $[-\pi/2, \pi/2]$ -n és az inverz folytonos a $[-1,1]$ -en (ez az \arcsin) ezen kívül az inverz deriválható a belső pontokban!

Ugyanis. $[-\pi/2, \pi/2]$ -n a \sin szigorúan monoton növekvő és inverz képe $[-1,1]$. Emiatt ez folytonos is és az inverzfüggvény-tétel miatt a nyíltan differenciálható, ugyanis

$$\frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} > 0, \quad \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

az inverze:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

Implicitfüggvény-tétel -- Ha a $\Phi : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény az $(x_0, y_0) \in \text{int}(I \times J)$ pontban teljesíti a $\partial \Phi / \partial y \neq 0$ feltételt, akkor a (x_0, y_0) pont egy környezetében egyértelműen létezik az $(x, y) = (x_0, y_0)$ egyenletnek az (x_0, y_0) ponton áthaladó implicit függvénye, azaz az x_0 egy $K \subset I$ környezetében értelmezett, J -beli értékű y deriválható függvény, melyre minden $x \in K$ esetén:

$$\Phi(x, y(x)) = \Phi(x_0, y_0), \quad y(x_0) = y_0$$

és ennek deriváltja minden $x \in K$ -ban:

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} \Bigg|_{(x, y(x))}$$

+ el?adásjegyzet