<Matematika A3a 2008

Tartalomjegyzék

Differenciálegyenletek

Fokszámban homogén egyenletek

1. $y' = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x}$

MO. $u = y / x$; $y = ux$; $y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{1}{u} + 2u$$
$$u'x = \frac{1+u^2}{u}$$
$$\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}\ln|1+u^2| = \ln|x| + C\text{; } (C \in \mathbf{R})$$
$$\ln|1+u^2| = \ln c_1^2 x^2\text{; } (c_1 = \ln C)$$
$$1 + u^2 = cx^2\text{; } (c > 0)$$

Implicit mo.:

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = cx^2$$

Explicit mo.:

$$y = x \cdot \left(\pm\sqrt{c}\sqrt{x^2 - \frac{1}{c}} \right)$$

Itt $|x| > \frac{1}{\sqrt{c}}$

2. $x^2 y' = xy + y^2$

MO. y 0 konstans mo. *y=ux* helyettesítéssel:

$$x^2(u'x + u) = ux^2 + u^2x^2$$

ahonnan intervallumon értelmezett megoldás esetén:

$$u'x + u = u + u^2$$
$$u'x = u^2$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C$$; $(C \in \mathbf{R})$

Implicit mo.:

$$-x = y \ln c|x|$$; $(c = \ln C\,)$ és *y=0*

Explicit mo.:

$$y = \frac{-x}{\ln c|x|}$$ és *y=0*.

3. $x^2 y' = 2xy + y^2$

MO. y 0 konstans mo. *y=ux* helyettesítéssel:

$$u'x + u = 2u + u^2$$
$$u'x = u + u^2$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

2.

$$\ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + C \text{ ; } (C \in \mathbf{R})$$

$$\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = \ln c_1|x| \text{ ; } (c_1 = \ln C)$$

$$\frac{u}{u+1} = cx \text{ ; } (c \in \mathbf{R})$$

Implicit mo.:

$$y = c(xy + x^2)\text{; } (c \in \mathbf{R})$$

Explicit mo.:

$$y = \frac{cx^2}{1+cx}\text{; } (c \in \mathbf{R})$$

Kezdetiérték feladat

1. $y' = e^{x-y}$; (*y(-1)=0*)

MO.

$$y' = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\int e^y \, \mathrm{d}y = \int e^x \mathrm{d}x$$

Implicit ált. mo.:

$$e^y = e^x + C \text{ ; } (C \in \mathbf{R})$$

Explicit általános mo.:

$$y = \ln(e^x + C)$$

Behelyettesítve az implicit ált. mo-ba:

$$e^{-1} = 1 + C$$

$$C = \frac{1}{e} - 1$$

A kezdeti feltételt kielégít? mo.:

$$y = \ln(e^x + \frac{1}{e} - 1)$$

2. $y' = \frac{2xe^{x^2}}{y^5}$; (*y(0)=-1*)

MO.

$$\int y^5 \,\mathrm{d}y = \int 2xe^{x^2} \,\mathrm{d}x$$

Implicit ált. mo.:

$$\frac{y^6}{6} = e^{x^2} + C$$; ($C \in \mathbf{R}$)

Explicit általános mo.:

$$y = \pm\sqrt[6]{6e^{x^2} + 6C}$$; ($C \in \mathbf{R}$)

Behelyettesítve az implicit ált. mo-ba:

$$\frac{1}{6} = 1 + C$$
$$C = \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$$

A kezdeti feltételt kielégít? mo.:

$$y = -\sqrt[6]{6e^{x^2} - 5}$$

Egzaktra visszavezethet?

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0, \qquad ? = y \in \mathrm{C}^1(I,J) \qquad P,Q \in \mathrm{C}^1(I \times J, \mathbf{R})$$
$$(Pdx + Qdy = 0)$$

$$\mu(x) = e^{\int R(x)dx}, \qquad R(x) = \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q}$$
$$\mu(y) = e^{-\int S(y)dy}, \qquad S(y) = \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{P}$$

Majd $? = F \in \mathrm{C}^1(I \times J, \mathbf{R})$

$$\begin{cases} \partial_x F = \mu P \\ \partial_y F = \mu Q \end{cases}$$

1. $\frac{1}{x^4} - 3y^2 = xyy'$

MO.:

$$\left(\frac{1}{x^4}-3y^2\right)\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y = 0$$
$$\partial_y\left(\frac{1}{x^4}-3y^2\right) - \partial_x(-xy) = -6y + y = -5y$$
$$R(x) = \frac{-5y}{-xy} = \frac{5}{x}$$
$$\mu(x) = e^{\int \frac{5}{x}\mathrm{d}x} = e^{5\ln|x|} = |x|^5$$

Tehát x^5 alkalmas integráló szorzó.

$$x - 3x^5y^2 - x^6yy' = 0$$

Innen az

$$(\partial xF, \partial_y F) = (x - 3x^5y^2, -x^6y)$$

egy megoldását megkeresve:

$$F = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^6y^2 + C_1(y)$$
$$F = -\frac{1}{2}x^6y^2 + C_2(x)$$

ahonnan:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^6y^2$$

És az implicit általános megoldás:

$x^2 - x^6y^2 = C$; ($C \in \mathbf{R}$)

(Az explicit pedig:

$y = \pm\sqrt{\frac{x^2+C}{x^6}}$)

2. $1 + (x - e^{-y})y' = 0$

MO.:

$$1\mathrm{d}x + (x - e^{-y})\mathrm{d}y = 0$$
$$\partial_y 1 - \partial_x(x - e^{-y}) = -1$$
$$S(y) = -1$$
$$\mu(y) = e^{-\int -1\mathrm{d}y} = e^y$$

integráló szorzó.

$$e^y \mathrm{d}x + (xe^y - 1)\mathrm{d}y = 0$$
$$(\partial x F, \partial_y F) = (e^y, xe^y - 1)$$

egy megoldását megkeresve:

$$F = xe^y + C_1(y)$$
$$F = xe^y - y + C_2(x)$$

ahonnan:

$$F(x,y) = xe^y - y$$

És az implicit általános megoldás:

$xe^y - y = C$; ($C \in \mathbf{R}$)

Lineáris argumentumú egyenlet

1. $y' = (4x-y)^2$

MO. u=4x-y; *u'=4-y'*

$$4 - u' = u^2$$
$4 - u^2 = u'$; konstans megoldások: $u = \pm 2$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} = \int 1 \mathrm{d}x$; (ha $u \neq \pm 2$)
$$-\int \frac{\mathrm{d}u}{(u-2)(u+2)} = \int 1 \mathrm{d}x$$
$$-\int \frac{\frac{1}{4}}{u-2} - \frac{\frac{1}{4}}{u+2} \mathrm{d}u = \int 1 \mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{4}\ln|u-2| + \frac{1}{4}\ln|u+2| = x + C$$

Implicit általános megoldás:

$\sqrt[4]{\left|\frac{4x-y+2}{4x-y-2}\right|} = e^{x+C}$ és az szeparálással ki nem hozható két megoldás: $y = 4x \pm 2$

2. $y' = \cos^2(x+y) - 1$

MO. u=x+y; *u'=1+y'*

$u' - 1 = \cos^2(u) - 1$; konstans megoldások: $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 u} = \int 1\,\mathrm{d}x$$; (ha $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

$$\mathrm{tg}(u) = x + C$$

Implicit általános mo.:

$\mathrm{tg}(x+y) = x + C$ és a szeparálással ki nem hozható megoldások: $y = -x + \frac{\pi}{2} + k\pi$

Függvényegyütthatós lineáris egyenlet

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad ? = y \in \mathrm{C}^1(I) \qquad f, g \in \mathrm{C}(I)$$

1. $y' - \frac{3}{x}y = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

MO. I.) Homogén. y 0 mo.

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int \frac{3}{x}\mathrm{d}x =$$
$$\ln|y| = 3\ln|x| + C$$
$$y = cx^3$$

II.) Az inhomogén partikuláris megoládást

$$y = c(x)x^3$$

alakban keressük.

$$y' = c'x^3 + c3x^2$$

Behelyettesítés után:

$$c'x^3 + 3cx^2 - 3cx^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$c' = \frac{-1}{2}\frac{-2}{x^3}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$c = \frac{-1}{2}\mathrm{tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

így az általános mo.:

$$y = cx^3 + \frac{-1}{2}x^3 \mathrm{tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. $y' + (\ln x^3)y = \ln x$

MO. I.) Homogén. y 0 (x>0) mo.

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int -3\ln x \,\mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -3(x + x\ln x) + C$$
$$y = ce^{-3(x+x\ln x)}$$

II.) Az inhomogén partikuláris megoládást

$$y = c(x)e^{-3(x+x\ln x)}$$

alakban keressük. Behelyettesítés után:

$$c'e^{-3(x+x\ln x)} + ce^{-3(x+x\ln x)}(-3\ln x) + ce^{-3(x+x\ln x)}\ln x^3 = \ln x$$
$$c' = e^{3(x+x\ln x)}\ln x$$
$$c = \frac{1}{3}e^{3(x+x\ln x)}$$

így az általános mo.:

$$y = ce^{-3(x+x\ln x)} + \frac{1}{3}$$

Laplace-transzformációval megoldható feladatok

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$
$$\mathcal{L}\{af(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$f'(t) \mapsto sF(s) - f(0)$$
$$f''(t) \mapsto s^2F(s) - sf'(0) - f(0)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \mapsto F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$
$$f(t) = 1 \mapsto F(s) = \frac{1}{s}$$
$$f(t) = t \mapsto F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = t^n \mapsto F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$
$$f(t) = \sin(\omega t) \mapsto F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$
$$f(t) = \cos(\omega t) \mapsto F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

1. x(0)=1; y(0)=-1 **kezdeti feltétellel** oldja meg az

$$\dot{x} = 3x + 4y$$
$$\dot{y} = 4x + 3y$$

egyenletrendszert!

MO.

$$sX - 1 = 3X + 4Y$$
$$sY + 1 = 4X + 3Y$$

Ebb?l kell kifejezni X-et és Y-t. Egyszer? a megoldás, ha észrevesszük, hogy ezeket összeadva:

$$s(X + Y) = 7(X + Y)$$
$$(s - 7)(X + Y) = 0$$

ami minden s-re csak akkor teljesül, ha X=-Y. (De egyenletrendezéssel is megy, ha az egyik egyenletb?l az s-sel meg nem szorzott változót kifejezzük és a másodikbe helyettesítjük, pl. az els?b?l az Y-t kifejezzük.) Innen pl. az els? egyenletb?l:

$$sX - 1 = -X$$
$$(s + 1)X = 1$$
$$X = \frac{1}{s + 1}$$

Ezt visszatranszformálva:

$$x = e^{-t}$$

És y=-x miatt:

$$y = -e^{-t}$$

2. y(0)=0; y'(0)=0 **kezdeti feltétellel** oldja meg az

$$y'' + 9y = x$$

egyenletet!

MO.

$$s^2Y + 9Y = \frac{1}{s^2}$$
$$(s^2+9)Y = \frac{1}{s^2}$$
$$Y = \frac{1}{s^2(s^2+9)}$$
$$Y = \frac{\frac{1}{9}}{s^2} - \frac{\frac{1}{9}}{s^2+9}$$
$$Y = \frac{\frac{1}{9}}{s^2} - \frac{1}{27}\frac{3}{s^2+9}$$

Innen visszatranszformálva:

$$y = \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}\sin(3x)$$

Próbafüggvény módszerrel megoldható egyenletek

Homogén egyenlet megoldása:

$y'' + ay' + by = 0 \mapsto \lambda^2 + r\lambda + s = 0$ (karakterisztikus polinom)
$\lambda_{1,2} = \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R}$, akkor $y_H = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ (bels? rezonancia)
$\lambda_{1,2} = \lambda$, akkor $y_H = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, akkor $y_H = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

Inhomogén partikuláris alakja rezonanciák nélkül, spéci esetekben:

$y'' + ay' + by = f(x)$, és

$f(x) = 7x - 8$, akkor $y_P = Ax + B$
$f(x) = 5x^2 - 4x + 2$, akkor $y_P = Ax^2 + Bx + C$
$f(x) = 8e^{ax}$, akkor $y_P = Ae^{ax}$
$f(x) = 7\sin(bx)$, akkor $y_P = A\cos(bx) + B\sin(bx)$

Általános (exp., trig., pol.) esetben pedig ha

$f(x) = e^{ax}(p(x)\cos(bx) + q(x)\sin(bx))$,

akkor

$$y_P = x^m e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx))$$

ahol $a \pm ib$ a karakterisztikus polinomnak *m*-szeres gyöke és deg{P}=deg{Q}=max{deg P, deg Q} polinomok (úgy értve, hogy deg 0=-). Tehát ha m>0, akkor küls? rezonancia van.

1. Adja meg az

$$y'' + 9y = x$$

egyenlet általános megoldását!

MO. $y_H = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$, mert $\lambda^2 + 9$ gyökei $\alpha \pm \beta i = \pm 3i$

$$f(x) = x \;\rightarrow\; y_P = Ax + B$$

Ezt behelyettesítve az egyenletbe:

$$9(Ax + B) = x$$

Tehát $A = \frac{1}{9}$ és $B = 0$, így az általános megoldás: $y_H = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{1}{9}x$,

2. (Rezonanciás feladatok)

a. $y'' + 9y = \sin(3x)$

Mo. vázlat. $\lambda^2 + 9 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Innen

$$y_H(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$$

Mivel

$$f(x) = \sin(3x)$$

ezért $a + bi = 3i$ egyszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, m=1 és az általános P(x), Q(x) polinomok konstansok: A,B, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása az

$$y_p(x) = Ax\cos(3x) + Bx\sin(3x)$$

alakban keresend?.

b. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Mo. vázlat. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = 2$. Innen

$$y_H(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Mivel

$$f(x) = e^{2x}$$

ezért a = 2 kétszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, és ezért m=2 az általános P(x), Q(x) polinomok közül csak P(x) marad, mert b=0 lévén Q(x) kiesik, de P(x)=A állandó, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása az

$$y_p(x) = Ax^2e^{2x}$$

alakban keresend?.

c. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

Mo. vázlat. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = \quad 1; \quad 2$. Innen

$$y_H(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

Mivel

$$f(x) = xe^x$$

ezért a = 1 egyszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, és ezért m=1 az általános P(x), Q(x) polinomok közül csak P(x) marad, mert b=0 lévén Q(x) kiesik (sin(0)=0), de P(x)=Ax+B els?fokú, mert p(x)=x (hiszen cos(0)=1 és ez megmaradt), így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása az

$$y_p(x) = x(Ax + B)e^x$$

alakban keresend?.

Komplex függvénytan

Folytonosság, határérték

1. Határozzuk meg, hogy az alábbi függvény folytonos-e?

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2-iz+2}{z^2+4} & z \neq \pm 2i \\ \frac{3}{4}, & z = \pm 2i \end{cases}$$

Mo. A $\pm 2i$ pontokon kívül a függvény folytonos függvények felhasználásával van definiálva a folytonosságot meg?rz? módokon, ezért $\pm 2i$ -n kívül folytonos. z = 2i-ben a függvény 0/0 alakú, ami határozatlan alak, de alakalmazható a L'Hospital szabály:

$$\lim_{z\to 2i} \frac{z^2 - iz + 2}{z^2 + 4} = \lim_{z\to 2i} \frac{2z - i}{2z} = \left.\frac{2z - i}{2z}\right|_{z=2i} = \frac{3}{4}$$

tehát a határérték létezik és a helyettesítési értékkel egyenl?, azaz 2i-ben a függvény folytonos.

z = – 2i-ben a függvény -4/0 alakú, ami a komplex függvénytanban határozott alak és ez a komplex végtelen: -4/0= . Tehát itt a függvény nem folytonos.

2. Hol létezik véges határértéke az alábbi függvényeknek?

a) $f(z)=\frac{\mathrm{Im}^3(z)+i\mathrm{Re}^2(z)}{z\overline{z}}$

b) $g(z)=\frac{z}{\mathrm{Re}(z)}$

Mo. a) Legyen $z = x + iy$. Mivel $z\overline{z}=x^2+y^2$, ezért f csak a 0-ban nincs értelmezve. Itt valós és képzetes részre bontva:

$$\frac{\mathrm{Im}^3(z)+i\mathrm{Re}^2(z)}{z\overline{z}}\equiv\left(\frac{y^3}{x^2+y^2},\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

A sejtés, hogy a valós komponensnek van, a képzetesnek nincs határtéráke. Ezért érdemes csak a képzetest megvizsgálni, mert pontosan akkor létezik a határérték, ha mindkét komponensnek létezik.

$y\equiv 0$ irányból $\left.\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|_{y=0}=\frac{x^2}{x^2}\equiv 1$

$x\equiv 0$ irányból $\left.\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|_{x=0}\equiv 0$

azaz a határérték nem létezhet a 0-ban. (Amúgy a valós rész határértéke létezik és 0, ugyanis rend?relvvel:

$$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|=|y|\frac{y^2}{x^2+y^2}\leq|y|\frac{y^2}{y^2}=|y|\to_{(x,y)\to(0,0)}0$$)

b)

$$g(z)\equiv(u,v)=\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

Nincs értelmezve az x=0 pontokban, azaz az y tengely pontjaiban. Nemnulla y_0 esetén a $(0,y_0)$ ponthoz az (x,y_0) mentén tartva $y_0\,/\,x$-nek végtelen a határértéke, tehát ott nem létezik. Ha y_0 nulla, akkor az (x,0) mentén y/x=0, az (x,x) mentén y/x=1, azaz az origóban sincs határértéke. De mindehol máshol van, mert a határérték invariáns az alapm?veletekre.

Deriválhatóság

1. Hol deriválható komplex módon és hol reguláris az alábbi függvény?

a) $f(z)=\overline{z}|z|^2$

b)** $g(z)=x^2-y^2+2|xy|i$

Mo. a) Legyen $z = x + iy$.

$$f(z) \equiv (u(x,y), v(x,y)) = \left(x^3 + xy^2, -x^2y - y^3\right)$$
$$\begin{bmatrix}\partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3x^2 + y^2 & 2xy \\ -2xy & -x^2 - 3y^2\end{bmatrix}$$

Ezek a parciális deriváltak mindenhol folytonosak, azaz az (u,v) pár totálisan deriválható mindenhol. Innen a Cauchy--Riemann-egyenletek:

$$3x^2 + y^2 = -x^2 - 3y^2$$
$$2xy = 2xy$$

Mivel az els?, azaz $3x^2 + y^2 + x^2 + 3y^2 = 0$ csak a 0-ban teljesül, a második pedig mindenhol, ezért a függvény pontosan a 0-ban deriválható. Ebb?l az is következik, hogy nincs olyan nyílt környezet, ahol minden pontban deriválható le.

b) $u = x^2 - y^2$, $v = 2\,|\,xy\,|$. Vegyük észre, hogy amikor 2|xy|=2xy egy egész nyílt környezetben, akkor g(z)=z^2, azaz ezekben az esetekben reguláris a függvény. Ez az xy>0 esetében van. Tehát csak a tengelyeken kell megvizsgálni. |xy| az origón kívül a tengelyeken parciálisan nem deriválható. Az origóban viszont CR is fennáll és totálisan is deriválhatóak a komponensek tehát ott deriválható.

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{|x|} = |y| \rightarrow_{(x,y)\to(0,0)} 0$$

A síknegyedeken belül tehát reguláris.

2. Hol deriválható komplex módon és hol reguláris az alábbi függvény?

a)* $f(z) = \sin(z)|z|$
b) $g(z) = y^2 + x^3 i$

Mo. a) HF CR-egyenletekkel igazolni, hogy |z| sehol se deriválató. Azt tudjuk, hogy sin(z) mindenütt deriválható. sin(z) = 0 pontosan akkor, ha $z = k$ (HF). Ezért $z \neq k\pi$ esetén, ha $f(z)$ deriválható lenne, akkor

$$\frac{f(z)}{\sin z} = \frac{1}{\sin z}\sin(z)|z| = |z|$$

is deriválható lenne, ami tehát lehetetlen. Már csak a $z = k$ pontokban kell megvizsgálni, amit definíció szerint teszünk. A különbségi hányados függvény az deriválás helyén 0/0 alakú, ezért az els? tényez?re alkalmazhatjuk a L'Hospital szabályt:

$$f'(k\pi) = \lim_{z\to k\pi}\frac{\sin(z)|z|}{z-k\pi} = \lim_{z\to k\pi}\frac{\sin(z)}{z-k\pi}\cdot\lim_{z\to k\pi}|z| = \lim_{z\to k\pi}\frac{\cos(z)}{1}|k\pi| = \cos(k\pi)|k\pi|$$

ami létezik, tehát minden k pontban deriválható a függvény, de máshol nem, így sehol sem reguláris.

b)

$$\begin{bmatrix}\partial_x u & \partial_y u\\ \partial_x v & \partial_y v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2y\\ 3x^2 & 0\end{bmatrix}$$

Ezek a parciális deriváltak mindenhol folytonosak, azaz az (u,v) pár totálisan deriválható mindenhol. Innen a Cauchy--Riemann-egyenletek:

$$\begin{matrix}0=0\\ 2y=-3x^2\end{matrix}$$

Azaz a függvény az

$$y=-\frac{3}{2}x^2$$

parabola mentén komplex deriválható, de sehol se reguláris, mert nincs olyan nyílt környzete, melyben mindenütt deriválható lenne.

3. (Harmonikustárs-keresés)

$$\partial_x^2 u+\partial_y^2 u\equiv 0,$$

akkor $u\in\mathbf{C}^2(U)$ harmonikus az $U\subseteq\mathbf{R}^2$ nyílton. Ha f=u+iv reguláris az U tartományon, akkor u és v harmonikus. Ha u harmonikus, az U tartományon, akkor létezik U-n v harmonikus, hogy f=u+iv reguláris. Ekkor v az u-nak egy harmonikus társa (és u az v-nek). Ha f=u+iv reguláris, akkor u,v-re teljesülnek a CR-egyenletek.

Ha létezik, akkor adjuk meg az

$$u(x,y)=x^2+xy-y^2$$

függvény harmonikus társát!

Mo.

$$\partial_x^2 u+\partial_y^2 u=2-2\equiv 0$$

tehát létezik harmonikus társa és ezt megtaláljuk az alábbiakból:

$$\begin{cases}\partial_x v=-\partial_y u\\ \partial_y v=\partial_x u\end{cases},\qquad \begin{cases}\partial_x v=-x+2y\to & v=-\frac{x^2}{2}+2xy+C_1(y)\\ \partial_y v=2x+y\to & v=2xy+\frac{y^2}{2}+C_2(x)\end{cases}$$

Tehát

$$v(x,y)=2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

(Hát persze, hiszen $u = Re((1 + i / 2)z^2)$)

Elemi függvények

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\
\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \\
\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\
\mathrm{sh} z &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \\
\mathrm{ch}\, z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \\
\ln re^{i\varphi} &= \ln r + i\varphi + 2\pi ik
\end{aligned}$$

1. Számítsa ki az

$$f(z)=\sin(iz)$$

függvény valós és képzetes részét!

MO. $z = x + iy$

2. Oldja meg a

$$e^{iz}=2i-2$$

egyenletet!

MO.

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
e^{iz} &= e^{\ln 2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
e^{iz} &= e^{\ln(2\sqrt{2})-i\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

mivel exp 2 i szerint periodikus, ezért:

$$\begin{aligned}
iz &= \ln(2\sqrt{2})-i\frac{\pi}{4}+2\pi ik \\
z &= -i\ln(2\sqrt{2})-\frac{\pi}{4}+2\pi k
\end{aligned}$$

3. Adja meg az

$$(1+i)^i$$

szám értékét!

MO.

$$(1+i)^i = e^{i\ln(1+i)} = e^{i(\ln(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4}+2\pi ik)} = e^{i\ln(\sqrt{2})-\frac{\pi}{4}-2\pi k} = e^{i\ln(\sqrt{2})}e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k} = (\cos\ln\sqrt{2}$$

Sorok

Taylor-sor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)$$
$\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{B}_R(z_0)$ valamely R-rel.

Laurent-sor:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$
$\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{int}(\mathrm{B}_{R_1}(z_0) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathrm{B}_{R_2}(z_0)))$ valamely R_1, R_2-vel.

Az f függvénynek a pont izolált szingularitása, ha f reguláris a egy kipontozott környezetében, de nem reguláris -ban. Izolált szingularitás körül a függvény Laurent-sor mindig lézezik ezért a sor alakja szerint osztályozzuk a szingularitásokat.

Megszüntethet?, ha L.-sorban nincsenek reciprokos tagok. Ilyenkor a függvény regulárissá tehet?, melynek Taylor-sora pont a Laurent-sora.

Pólusszingularitása van f-nek a pontban, ha a körüli Laurent-sor f?részében 1 / (z –)-nak véges sok nemnulla hatványa szerepel. Ezek körzül a 1 / (z –) legnagyobb kitev?j? hatványának kitev?je a pólusszingularitás foka.

Lényeges szingularitása van f-nek -ban, ha a körüli Laurent-sorban 1 / (z –)-nak végtelen sok nemnulla hatványa szerepel.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$, ha | q | < 1

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\begin{aligned}
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!} \pm \dots \\
\operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \\
\operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots
\end{aligned}$$

1. Igazolja, hogy az

$$f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^3}$$

függvénynek megszüntethet? szakadása van a 0-ban! Adja meg a reguláris kiterjesztés 100. deriváltját a 0-ban!

MO.

$$f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^3} = \frac{-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots}{z^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} \pm \dots$$

Mivel a sorfejtés egyértelm?, ezért a z^{100} tag együtthatója egyértelm?, azaz egyfel?l a Taylor-sorból felírva, másfel?l a most megadott sorfejtésb?l:

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(100)}(0)}{100!} &= -\frac{1}{103!} \\
f^{(100)}(0) &= -\frac{100!}{103!} = -\frac{1}{101 \cdot 102 \cdot 103}
\end{aligned}$$

2. Fejtse Laurent-sorba az

$$f(z) = \frac{z}{z + i}$$

függvényt úgy, hogy a sorfejtés a 1/2 pontban el?állítsa a függvényt!

a) a 0 körül,

b) az 1 körül

c) Milyen szingularitása van a -i-ben? Mennyi a reziduuma ebben?

MO. a) Ha ránézünk a becses kezeinkkel rajzolt ábrára (ugye mindenki csinált ábrát!), akkor láthatjuk, hogy a reguláris, bels? körbe esik mindkét pont körül az 1/2.

$$f(z)=\frac{z}{z+i}=\frac{z}{i}\frac{1}{\frac{z}{i}+1}=\frac{z}{i}\frac{1}{1-\frac{-z}{i}}$$

tehát $q=\frac{-z}{i}$, ami |z|<1 esetén lesz konvergens sor alakú:

$$f(z)=\frac{z}{i}\frac{1}{1-\frac{-z}{i}}=\frac{z}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{i}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{i}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+1}z^{n+1}$$

b)

$$f(z)=\frac{(z-1)+1}{(z-1)+1+i}=\frac{z-1}{(z-1)+1+i}+\frac{1}{(z-1)+1+i}=(z-1)\frac{1}{(z-1)+1+i}+$$
$$\frac{1}{(z-1)+1+i}=\frac{1}{1+i}\frac{1}{\frac{z-1}{1+i}+1}=\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\frac{-(z-1)}{1+i}}$$

tehát $q=\frac{-z+1}{1+i}$, ami $|z-1|<\sqrt{2}$ esetén lesz konvergens sor alakú:

$$\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\frac{-(z-1)}{1+i}}=\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\frac{-(z-1)}{1+i}}=\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(z-1)}{1+i}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{1+i}\right)^{n+1}(z-1$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{1+i}\right)^{n+1}(z-1)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{1+i}\right)^{n+1}(z-1)^{n}$$

c)

$$f(z)=\frac{z}{z+i}=\frac{z+i-i}{z+i}=1-\frac{i}{z+i}$$

maga a -i körüli Laurent-sor, itt a reciprokos tag együtthatója: -i, azaz ennyi a reziduum. Pólusszingularitása van itt és ennek foka 1, mert a Laurent-sor f?részében csak a reciprok szerepel.

3. Fejtse Laurent-sorba az

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z+i)}$$

függvényt a 0 körül úgy, hogy a sorfejtés a 2i pontban el?állítsa a függvényt! Milyen szingularitása van a 0-ban? És a -i-ben?

Mo.

Az ábrából látható, hogy a szingularitáson túli gy?r?ben van 2i, ezért 1/z szerint kell sorfejteni.

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z+i)}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1+\frac{i}{z})}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\frac{-i}{z})}$$

tehát $q=\frac{-i}{z}$, ami |z|>1 esetén lesz konvergens sor alakú, azaz 2i ide tartozik

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{n+3}$$

0 az f nevez?jének kétszeres gyöke, a számlálónak nem gyöke, a -i a nevez?nek egyszeres, a számlálónak nullaszoros gyöke. Tehát 0-ban másodfokú pólusa van, -i-ben els?fokú.

4. Fejtse Laurent-sorba az

$$f(z)=\mathrm{sh}(\frac{1}{z^2})$$

függvényt a 0 körül! Milyen szingularitása van a 0-ban?

MO.

$$f(z)=\mathrm{sh}(\frac{1}{z^2})=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}+\frac{1}{7!z^{14}}+\dots$$

végtelen sok tag van a f?részben, ezért a szingularitás lényeges.

Integrálás paraméterezéssel és Newton--Leibniz-formulával

$$\int_G f=\int_{t=t_1}^{t_2} f(z(t))\dot{z}(t)dt$$

ahol G paraméterezése $t\mapsto z(t)$, $t_1\leq t\leq t_2$ folytonosan differenciálható, f folytonos a G-t tartalmazó egy nyílt halmazon.

$$\int_{G,z_1}^{z_2} f=F(z_2)-F(z_1)$$

ahol F komplex deriválható és F'=f, valamint f Riemann integrálható a G mentén, G kezd?pontja z_1, végpontja z_2

1. Adja meg az

$$f(z)=\overline{z}^2$$

függvény integrálját az

a) Origó középpontú, pozitívan irányított egységkör $Re(z) \geq 0$ feltételt teljesít? felére!

b) [0,2+i] szakaszra!

2. Adja meg az

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2}$$

függvény integráláját az

a) Origó középpontú, pozitívan irányított kétségkör $Im(z), Re(z) \leq 0$ feltételt teljesít? negyedére! **b**) Origó középpontú, pozitívan irányított kétségkörre!

Integrálás Riemann-féle integráltétellel és Cauchy-féle integrálformulával

Cauchy-féle integráltétel Ha a D korlátos és zárt tartomány ∂D határa egy zárt görbével paraméterezhet? és a görbe a tartománnyal kompatibilisan irányított, továbbá a D U **C** nyílt halmazon reguláris az f függvény, akkor

$$\oint_{\partial D} f = 0$$

Riemann-féle integráltétel Ha a D korlátos és zárt tartomány ∂D határa egy zárt görbével paraméterezhet? és a görbe a tartománnyal kompatibilisan irányított, továbbá a D U **C** nyílt halmazon reguláris az f függvény, kivéve a D egyetlen pontját és f korlátos, akkor

$$\oint_{\partial D} f = 0$$

Cauchy-féle integrálformulák Ha a D korlátos és zárt, egyszeresen összefügg? tartomány G=∂D határa egy zárt görbével paraméterezhet? és a görbe a tartománnyal kompatibilisan irányított, továbbá a D U **C** nyílt halmazon reguláris az f függvény és $z_0 \in \mathrm{int} D$, akkor

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

1.* $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)-1}{\sin(z^2)} =? \,\mathrm{d}z$

2. $$\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^{100}}\,\mathrm{d}z = ?$$

3. $$\oint_{|z-i|=2} \frac{z^2+z+1}{z^4+4z^2}\,\mathrm{d}z = ?$$

4. $$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos(\ln z)}{z^2-3z+2} = ?$$

Integrálás reziduumtétellel

Reziduumtétel Ha a D korlátos és zárt, egyszeresen összefügg? tartomány G=∂D határa egy zárt görbével paraméterezhet? és a görbe a tartománnyal kompatibilisan irányított, továbbá a D U **C** nyílt halmazon reguláris az f függvény kivéve a $z_1,\dots,z_n \in \operatorname{int} D$ pontokban, akkor

$$\oint_G f = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}^f(z_k)$$

ahol Res^f( ) az f függvény körüli azon Laurent-sorának c_{-1} együtthatója, mely a függvényt a egy kipontozot környzetében állítja el?.

1.* $$\oint_{|z|=1} \frac{z^2+5z+1}{\operatorname{sh}(z)}\,\mathrm{d}z = ?$$

2. $$\oint_{|z-3|=1} \frac{5z+1}{\sin(z)}\,\mathrm{d}z = ?$$

3. $$\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2+2}}{(2z+4)\sin(\frac{\pi z}{4})}\,\mathrm{d}z = ?$$

Vektoranalízis

Differenciáloperátorok

1. Hol létezik és mennyi az alábbi függvények gradiense?

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^4$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2}$

c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sin(|\mathbf{r}|^3)$

2. Hol létezik és ott mi az alábbi térbeli vektormez? rotációja és divergenciája?

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^6$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ (**k** a z irányú egységvektor)

Potenciálkeresés

1. Ha van, mi az alábbi térbeli vektormez? potenciálja?

$$v(x,y,z) = (2xy^3, 3x^2y^2, z^2)$$

2. Ha van, mi az alábbi síkbeli vektormez? potenciálja?

$$v(x,y) = (x^3 + y^3, 3xy^2)$$

3. Ha van, mi az alábbi függvény potenciálja?

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^6$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{2\mathbf{r}}{1+|\mathbf{r}|^2}$

Vonalintegrál

$$\int_{G,\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t$$

ahol $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$.

$$\int_G \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_G v_t\,|\mathrm{d}\mathbf{r}|$$

ahol v_t a vektormez?nek a görbe érint?je irányú komponense, az integrál pedig a vektormez? ívhossz szerinti integrálja.

1. Számítsuk ki az alábbi vektormez?nek az A=(1,-2,3), B=(2,1,4) végpontú egyenes szakaszra vonatkozó integrálját!

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$$

2. Számítsuk ki a **v** = **k** × **r** függvénynek az R sugarú, [x,y] síkbeli origó középpontú körre vonatkozó integrálját!

3. Számítsuk ki a **v** = **k** × **r** / |**k** × **r**|^2 függvénynek az R sugarú, [x,y] síkbeli origó középpontú körre vett integrálját!

Felületi integrál

$$\int_F \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{F} = \int_{F_{u,v}} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \left(\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \right) \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\int_F \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{F} = \int_F v_{\mathbf{n}}\,|\mathrm{d}\mathbf{F}|$$

felszín integrállal a normális irányú komponensb?l.

1. Számítsuk ki a **v** vektormez?nek az **r** felületre vett integrálját:

$$\mathbf{v}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k},\ u \in [0,3],\ v \in [0,1]$$

2. Számítsuk ki az **v** = **r**-nek az R sugarú, M magasságú, z tengely? hengerre vonatkozó felületi integrálját!

3. Számítsuk ki az R sugarú origó középpontú gömbnyolcad felszínére az **v** = **r**|**r**|^3 integrálját!