Tartalomjegyzék

Differenciálgeometria

Ívhossz és ívhosszparaméterezés

$$s=\int_{t_1}^{t_2}|\dot{\mathbf{r}}(t)|dt$$

$$s(t')=\int_{t_0}^{t'}|\dot{\mathbf{r}}(t)|dt$$

$$s=s(t')\qquad\rightarrow\qquad t'=t'(s)\qquad\rightarrow\qquad \mathbf{r}(s)=\mathbf{r}(t')|_{t'=t'(s)}$$

1. a) Mi az alábbi görbe ívhossza a [1,e] paraméterszakaszon és mi az ívhosszparaméterezése t=1-tól kezd?d?en?

$$\mathbf{r}(t)=(t\cos\ln t,t\sin\ln t,t)$$

b) Mi az alábbi görbe ívhossza a [0,1] paraméterszakaszon és mi az ívhosszparaméterezése t=0-tól kezd?d?en?

$$\mathbf{r}(t)=(\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{t^3},2t,\frac{3}{2}t^2)$$

MO.: a)

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=(\cos\ln t-t\sin\ln t\cdot\frac{1}{t},\sin\ln t+t\cos\ln t\cdot\frac{1}{t},1)=(\cos\ln t-\sin\ln t,\sin\ln t+\cos\ln t,$$
$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|=\sqrt{(\cos\ln t-\sin\ln t)^2+(\sin\ln t+\cos\ln t)^2+1}=$$
$$=\sqrt{\cos^2\ln t+\sin^2\ln t-2\cos\ln t\sin\ln t+\cos^2\ln t+\sin^2\ln t+2\cos\ln t\sin\ln t+1}=$$

Ívhossz: [1,e]-n:

$$s=\int\limits_1^e\sqrt{3}\,dt=[\sqrt{3}\cdot t]_1^e=\sqrt{3}(e-1)$$

Ívhossz paraméterezés t=1-t?l:

$$s(t')=\int\limits_{t=1}^{t'}\sqrt{3}\,dt=[\sqrt{3}\cdot t]_1^{t'}=\sqrt{3}(t'-1)\qquad\rightarrow\qquad t'=\frac{s}{\sqrt{3}}+1$$
$$\mathbf{r}(s)=\left(\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\cos\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right),\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\sin\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right),\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$$

b)

$$\sqrt{t^3}=t^{\frac{3}{2}}$$
$$\dot{\mathbf{r}}(t)=(\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{3}{2}\sqrt{t},2,\frac{3}{2}2t)=(2\sqrt{3}\sqrt{t},2,3t)$$
$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|=\sqrt{12t+4+9t^2}=$$

Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzet áll:

$$=\sqrt{12t+4+9t^2}=\sqrt{9t^2+12t+4}=\sqrt{(3t+2)^2}=|3t+2|$$ ez t>0-ra persze azonos 3t+2-vel.

Ívhossz: [1,e]-n:

$$s=\int\limits_0^{10}3t+2\,dt=\left.\frac{(3t+2)^2}{6}\right|_0^{10}=\frac{(32)^2}{6}-\frac{2}{3}$$

Ívhossz paraméterezés t=0-tól:

$$s(t')=\int\limits_{t=1}^{t'}3t+2\,dt=\left[\frac{(3t+2)^2}{6}\right]_0^{t'}=\frac{(3t'+2)^2}{6}-\frac{2}{3}$$

$$t'=\frac{\sqrt{6(s+\frac{2}{3})}-2}{3}=\frac{\sqrt{6s+4}-2}{3}$$

$$\mathbf{r}(s)=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6s+4}-2}{3}\right)^3},2\frac{\sqrt{6s+4}-2}{3},\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{6s+4}-2}{3}\right)^2\right)$$

Felszín

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ esetén

$$A=\iint\limits_{T_{u,v}}|\partial_u\mathbf{r}\times\partial_v\mathbf{r}|\,dudv$$

$z = f(x,y)$ esetén

$$A=\iint\limits_{T_{x,y}}\sqrt{(\partial_x f)^2+(\partial_y f)^2+1}\,dxdy$$

2. a) Számítsuk ki a $z = x^2 - y^2$ egyenlettel adott felület azon darabjának felszínét, melyet az $x^2+y^2\leq 4$, $x\geq 0$ feltételek adnak meg!

b) Számítsuk ki a $z=\frac{x^2}{2y}$ egyenlettel adott felület azon darabjának felszínét, melyet az $0\leq x\leq 1$, $1\leq y\leq 3$ feltételek adnak meg!

c) Számítsuk ki az $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,u)$ felület azon darabjának felszínét, melyet a $0\leq u\leq 2$, $0\leq v\leq \pi$ feltételek adnak meg!

MO.: a)

$$\sqrt{(\partial_x z(x,y))^2+(\partial_y z(x,y))^2+1}=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}=\sqrt{4x^2+4y^2+1}=\sqrt{4(x^2+$$

Mivel a tartomány is és a függvény is hengerszimmetriát mutat (minden amiben $x^2 + y^2$ van, az hengerszimmetrikus), ezért az integrált hengerkoordinátákban számítjuk ki. A tartomány derékszög? és polárparamméterezése (érdemes felrajzolni koordinátarendszerben és leolvasni az r-t, -t), r a Jacobi-determináns:

$$T_{x,y}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4,x\geq 0\}$$

$$T_{r,\varphi}=\{(r,\varphi)\mid 0\leq r\leq 2,-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\}$$

$$A=\int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{2}\sqrt{4r^2+1}\,r\,drd\varphi=\frac{1}{8}\int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{2}\sqrt{4r^2+1}\,8r\,drd\varphi=\frac{1}{8}[\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot[\frac{2}{3}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}]$$

b)

$$\sqrt{(\frac{x}{y})^2+(-2\frac{x^2}{4y^2})^2+1}=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{x^4}{4y^4}+1}=$$

Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatt egy teljes négyzet

$=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{x^4}{4y^4}+1}=\sqrt{\left(\frac{x}{2y}+1\right)^2}=\left|\frac{x}{2y}+1\right|$, ami $\frac{x}{2y}+1$, a $0\leq x\leq 1$, $1\leq y\leq 3$ feltételek mellett.

$$T_{x,y}=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,1\leq y\leq 3\}$$

$$A=\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=1}^{3}\frac{x}{2y}+1\,dydx=\int\limits_{x=0}^{1}[2x(\ln y)+y]_{y=1}^{3}\,dx=\int\limits_{x=0}^{1}2x(\ln 3)+2\,dx=[x^2(\ln 3)+$$

Érint?sík

Ha $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ a felület, akkor az érint?sík normálisa:

$\mathbf{n}=\partial_u\mathbf{r}\times\partial_v\mathbf{r}$, ha pedig **n**=(A,B,C), akkor az érint?sík egyenlete:
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

ahol (x_0,y_0,z_0) annak a pontnak a koordinátái, ahol az érint?síkot keressük, ez néha $\mathbf{r}(u_0,v_0)$-ként van meghatározva. Speciálisan, ha z=f(x,y) és u=x, v=y, akkor $\mathbf{n}=(\partial_x f,-\partial_y f,1)$. Ugyanis ekkor (x,y,f(x,y)) a felület és

$$\partial_x\mathbf{r}=(1,0,\partial_x f)$$
$$\partial_y\mathbf{r}=(0,1,\partial_y f)$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & \partial_x f\\ 0 & 1 & \partial_y f\end{vmatrix}=-\mathbf{i}\partial_x f-\mathbf{j}\partial_y f+\mathbf{k}$$

3. a) $\mathbf{r}(u,v)=(e^u\sin v,e^u,uv+1)$. Mi az érint?síkja az (u,v)=(0,0)-ban?

b) $z=x^2-y^2$ érint?síkja a $(x_0,y_0,z_0)=(0,1,-1)$-ben.

MO.: a)

$$\partial_u \mathbf{r} = (e^u \sin v, e^u, v)$$
$$\partial_v \mathbf{r} = (e^u \cos v, 0, u)$$

az adott (0,0) pontban

$$\partial_u \mathbf{r} = (0,1,0) = \mathbf{j}$$
$$\partial_v \mathbf{r} = (1,0,0) = \mathbf{i}$$

ezek vektoriális szorzata: -**k**, azaz a normálvektor: (A,B,C)=(0,0,-1) vagy egyszer?bben (A,B,C)=(0,0,1) mert az érint?síknál nincs jelent?sége a normálvektor irányításának. Az adott pont: $\mathbf{r}(0,0) = (0,1,1) = (x_0, y_0, z_0)$ Tehát a sík egyenlete: z-1=0, azaz z=1.

b) $\mathbf{n} = (2x, -2y, 1) = (0, -2, 1) = (A, B, C)$

$-2(y-1) + z + 1 = 0$

Differenciálegyenletek

Egzaktra visszavezethet? egyenlet

Mi a megoldása az $x^2 - y^2 + 3xyy' = 0$ egyenletnek?

MO.:

$$(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$$ legyen itt:

$$P(x,y) = x^2 - y^2, \quad Q(x,y) = 3xy$$
$$\partial_y P - \partial_x Q = -2y - 3y = -5y$$
$$R(x) = \frac{\partial_y P - \partial_y Q}{Q} = \frac{-5y}{3xy} = -\frac{5}{3}\frac{1}{x}$$
$$\mu(x) = e^{\int -\frac{5}{3}\frac{1}{x}dx} = e^{-\frac{5}{3}\ln|x|} = x^{-\frac{5}{3}}$$

$$(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{5}{3}}y^2)dx + 3x^{-\frac{2}{3}}ydy = 0$$

Függvényegyütthatós lineáris egyenlet

Mi a megoldása az $y' - 2xy = x$ egyenletnek? Melyik az a partikuláris megoldás, melyre $y(0) = -\frac{1}{2}$?

MO.:

A homogén megoldása:

$$y' - 2xy = 0$$
$$y' = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \qquad (y = 0 \text{ mo.})$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$
$$\ln|y| = x^2 + C$$
$$|y| = e^{x^2+C}$$
$y = ce^{x^2}$ els?rend? homogén lineáris megoldása egy egydimenziós függvénytér, ebben a 0 is benne van.

Az inhomogén egy partikuláris megoldását az alábbi alakban keressük:

$$y = c(x)e^{x^2}$$
$$y' = c'(x)e^{x^2} + c(x)2xe^{x^2}$$

Behelyettesítve:

$$c'(x)e^{x^2} + c(x)2xe^{x^2} - 2xc(x)e^{x^2} = x$$
$$c'(x)e^{x^2} = x$$
$$c'(x) = xe^{-x^2}$$
$c(x) = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ elég egy partikuláris megoldás.

Innen az inhomogén általános megoldása:

$$y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

A kezdeti érték feladathoz:

$$y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2} = c - \frac{1}{2}$$

Azaz c=0 és így

$$y_P = -\frac{1}{2}$$

Lineáris állandóegyütthatós

Minden

$$f_0(x)y + f_1(x)y' + ... + f_n(x)y^{(n)}) = f(x)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldásainak halmaza

$$y = y_H + y_P$$

alakú, ahol y_H a homogén

$$f_0(x)y + f_1(x)y' + ... + f_n(x)y^{(n)})$$

egyenlet megoldása, y_p pedig az egyenlet egy partikuláris megoldása.

Állandóegyütthatójú, ha

$f_0(x) = a_0, f_1(x) = a_1 + ... + f_n(x) = a_n$ számok.

Gyakran csak másodrend?:

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

ha a, b, c **R**.

Ilyenkor a homogén egyenlet megoldását az a ^{2}+b +c=0 karakterisztikus egyenlet megoldásából származó gyökökb?l száraztatjuk (bizonyítása a bizonyítások között).

$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, ha $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R}$
$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbf{R}$ (gyök vagy bels? rezonancia esete)
$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, ha $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbf{C}$

Az inhomogén egyenlet megoldását a következ? alakban keressük. Ha az inhomogén tag az alábbi alakban írható

$$f(x) = e^{ax} \left(p(x)\cos(bx) + q(x)\sin(bx)\right)$$

ahol p(x) és q(x) polinomok és a a+ib **C** szám m szeres gyöke az a ^{2}+b +c karakterisztikus polinomnak, akkor az $y_p(x)$ partikuláris megoldásra a feltevés:

$$y_p(x) = x^m e^{ax} \left(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx)\right)$$

ahol P(x) és Q(x) olyan polinomok, hogy deg P(x)=deg Q(x)= max{deg p(x), deg q(x)}.

4. $y'' + 4y = \sin(2x)$ kezdeti feltételek: $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

MO.: I. El?ször a homogén egyenletet oldjuk meg:

$$y'' + 4y = 0$$
$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i$ (tehát a megoldás $\alpha \pm \beta i$, alakú, ahol = 0, = 2)

$$y_H = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

II. Vegyük észre, hogy a karakterisztikus egyenlet = 2 gyöke rezonanciában van az sin(2x) inhomogén tag 2 frekvenciájával. Ekkor egy x szorzót veszünk hozzá az Asin(2x) + Bcos(2x) kifejezéshez, ezért a próbafüggvény:

$$y_P = x(A\sin(2x) + B\cos(2x))$$

lesz.

$$y'_P = A\sin(2x) + 2Ax\cos(2x) + B\cos(2x) - 2Bx\sin(2x)$$
$$y''_P = 2A\cos(2x) + 2A\cos(2x) - 4Ax\sin(2x) - 2B\sin(2x) - 2B\sin(2x) - 4Bx\cos(2x)$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$y'' + 4y = \sin(2x)$$
$$4A\cos(2x) - 4Ax\sin(2x) - 4B\sin(2x) - 4Bx\cos(2x) + 4xA\sin(2x) + 4Bx\cos(2x) = \sin$$
$$4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) = 1 \cdot \sin(2x) + 0 \cdot \cos(2x)$$

Az együtthatókat leolvasva:

$4A = 0, -4B = 1$ azaz $A = 0, B = -\frac{1}{4}$

Az általános megoldás:

$$y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

A kezdeti érték feltételb?l a konstansok:

$$y(0) = 0$$
$$0 = C_1$$
$$y'(0) = -1$$
$$y' = -2C_1\sin(2x) + 2C_2\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$-1 = +2C_2 - \frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2} = +2C_2$$
$$-\frac{1}{4} = C_2$$

5.

$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ kezdeti feltételek: $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

MO.: I. El?ször a homogén egyenletet oldjuk meg:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \qquad \to \qquad \lambda_1 = 2, \lambda_1 = 3$$

$$y_H = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

II. Vegyük észre, hogy 2 gyök rezonál az exponenciális frekvenciájával. Ezért a partikuláris megoldást

$$y = Axe^{2x}$$

alakban keressük.

$$y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$
$$y'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 5(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 6Axe^{2x} = e^{2x}$$
$$2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 5Ae^{2x} - 10Axe^{2x} + 6Axe^{2x} = e^{2x}$$
$$-Ae^{2x} = e^{2x}$$
$$-A = 1$$
$$A = -1$$

Áltlános megoldás:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - xe^{2x}$$

A kezdeti érték feltételb?l a konstansok:

$y(0) = 1$: x=0, y=1
$$1 = C_1 + C_2$$
$y'(0) = -1$: x=0, y'=-1
$$y' = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x} - e^{2x} - 2xe^{2x}$$
$$-1 = 2C_1 + 3C_2 - 1$$
$0 = 2C_1 + 3C_2$ azaz $C_2 = -\frac{2}{3}C_1$
$$1 = C_1 + C_2$$
$1 = C_1 - \frac{2}{3}C_1$ azaz $1 = \frac{1}{3}C_1$ azaz $C_1 = 3$ $C_2 = -2$

Hiányos magasabbrend?

Gyakori probléma a lineáris, melyet hiányosként oldunk meg:

6.

$$y''' + 2y'' + y' = 3x^2$$

Ez egy y-ban hiányos lineáris. Valójában olyan, mintha nem is y-ra, hanem y'-re lenne felírva az egyenlet. Ilyenkor érdemes el?ször y'-re megoldani, majd y'-t integrálni, hogy y-hoz jussunk. Ehhez bevezetjük a p(x)=y'(x) új ismeretlen függvényt. Ekkor az egyenlet:

$$p'' + 2p' + p = 3x^2$$

Ez már egy állandó együtthatójú másodrend? lineáris. El?ször megoldjuk p-re.

I. Karakterisztikus polinom

$^2 + 2 \quad + 1 = 0$

Ez egy teljes négyzet:

$(\quad + 1)^2 = 0$ azaz $_{1,2} = -1$, vagyis bels? rezonancia van, a gyökök egybeesnek.
$p_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

II. Próbafüggvény a másodfokú polinom miatt:

$p_P = Ax^2 + Bx + C$
$p_P' = 2Ax + B$
$p_P'' = 2A$
$2A + 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = 3x^2$
$2A + C + 2B + (4A + B)x + Ax^2 = 3x^2$

A=3, B=-12, C=-6+12=6

Innen

$p = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3x^2 - 12x + 6$

Az y-t a p=y' egyenlet miatt a p integrálásával kapjuk:

$y = -C_1 e^{-x} - C_2 x e^{-x} - C_2 e^{-x} + x^3 - 6x^2 + 6x + D$

ahol a középs? tag parciális integrálással kapható:

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}dx$$

Integrálátalakító tételek

Gauss-tétel

Gauss-tétel: Ha V olyan mérhet? korlátos térfogat, melyet az F felület határol és **v** olyan folytonosan differenciálható vektormez?, mely a V-t és az F-et tartalmazó nyílt halmazon értelmezett, és az F a V-b?l kifelé van irányítva akkor

$$\oint_F \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,dV$$

F. Számítsuk ki $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ és z=1 egyenletek által meghatározott felületek által bezárt korlátos térfogat kifelé irányított határára a

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x^3 z^2, y^3 z^2, xy)$$

vektormez? integrálját!

MO. Láthatóan a felület hengerszimmetrikus, hiszen csak r-t?l és z-t?l függ ($x^2 + y^2$ van benne).

$z=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ hengerkoordinátákban:

$$z=\sqrt[3]{r^2}$$

ez egy gyökfüggvény a z tengely körül körbeforgatva (tölcsér) és a magassága z=1. A két felület metszésvonala:

$$z=\sqrt[3]{r^2}$$
$$z=1$$

azaz

$$1=\sqrt[3]{r^2}$$

és

$$r=1,\ z=1.$$

Alulról tehát a tölcsér, felülr?l egy sík határolja a térfogatot, ezért a fels? határ: z=1, az alsó határ $z=\sqrt[3]{r^2}$, miközben a sugár $0\leq r\leq 1$ és a forgásszimmetria miatt: $0\leq\varphi\leq 2\pi$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\partial_x v_1+\partial_y v_2+\partial_z v_3=3x^2z^2+3y^2z^2=3z^2r^2$$

$$\oint_F \mathbf{v}\,d\mathbf{f}=\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,dV=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r^{\frac{2}{3}}}^{1} r^2 3z^2 r\,dzdrd\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}[r^3z^3]_{z=r^{\frac{2}{3}}}^{1}\,drd\varphi=$$
$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^3-r^5\,drd\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}[\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6]_0^1\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\,d\varphi=\frac{\pi}{6}$$

F. Számítsuk ki $z\leq\sqrt{4-x^2-y^2}$ és $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ egyenl?tlenségek által meghatározott korlátos térfogat kifelé irányított határárra a

$$\mathbf{v}(x,y,z)=(y,x,\frac{1}{3}z^3)$$

vektormez? integrálját!

MO.: Zárt térfogatra kell integrálni, ez Gauss-tétel lesz. A vektormez? divergenciája:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\partial_x v_1+\partial_y v_2+\partial_z v_3=0+0+z^2=z^2$$

A $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ feltételek az els? térnyolcadot határozzák meg, az $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ egyenlet pedig a 2 sugarú, origó középpontú gömbfelületet fels? felét, ugyanis gömbi koordinátákban r az origótól mért távolság:

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$z^2 = 4 - x^2 - y^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$
$r^2 = 4$

A tartomány gömbi paraméterezése

$$V_{r,\varphi,\vartheta}=\{(r,\varphi,\vartheta)\mid 0\leq r\leq 2, 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}\}$$

mivel

$$z=r\cos\vartheta$$

és a Jacobi-determináns:

$$r^2\sin\vartheta$$

ezért

$$\oint_F \mathbf{v}\,d\mathbf{f}=\int_V \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV=\int_{r=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\vartheta r^2\sin\vartheta\,d\vartheta d\varphi dr=\int_{r=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos^2\vartheta\sin$$

$$=\left(\int_{r=0}^{2} r^4 dr\right)\cdot\left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\vartheta\sin\vartheta d\vartheta\right)\cdot\left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi\right)=\frac{2^5}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Stokes-tétel

Stokes-tétel: Ha F olyan határral rendelkez? felület, melynek határa a G zárt görbe és ezek kompatibilisen vannak irányítva, (azaz a jobbkézszabállyal), akkor minden az ezeket tartalmazó nyílt halmazon értelmezett **v** folytonosan differenciálható vektormez?re

$$\oint_G \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_F \operatorname{rot}\mathbf{v}\,d\mathbf{f}$$

Megjegyzés. A $\mathbf{v}$ vektormez? integrálját az $F:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ megadású $T_{u,v}$ értelmzési tartományú felületdarabra a következ?képpen számítjuk ki:

$$\int_F \mathbf{v}\,d\mathbf{f}=\iint_{T_{u,v}}\begin{vmatrix} w_1(\mathbf{r}(u,v)) & w_2(\mathbf{r}(u,v)) & w_3(\mathbf{r}(u,v))\\ (\partial_u\mathbf{r})_1 & (\partial_u\mathbf{r})_2 & (\partial_u\mathbf{r})_3\\ (\partial_v\mathbf{r})_1 & (\partial_v\mathbf{r})_2 & (\partial_v\mathbf{r})_3\end{vmatrix} dudv$$

F. Számítsuk ki a $z = x^2 - 1$ felület $x^2+y^2\leq 9$ feltételnek eleget tév? darabjának határára a $\mathbf{v}(x,y,z)=(z^2,x^2,y^2)$ vektormez? görbementi integrálját!

MO. Megvan a felület is és a pereme is, ezért Stokes. Ehhez a rotációt kell meghatározni.

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2z, 2x)$$

A felület paraméterezése z=f(x,y)-nál mindig x=u, y=v választással:

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2-1 \end{pmatrix}$$

A vegyes szorzat:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}(x,y)) \\ \partial_x \mathbf{r}(x,y) \\ \partial_y \mathbf{r}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2(x^2-1) & 2x \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - 4xy$$

$$\oint_G \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \int_F \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \iint_{T_{x,y}} 2x - 4xy\,dxdy =$$

Ez a $x^2 + y^2 \leq 9$ forgásszimmetriája miatt polárkoordinátákban

$$= \int_{r=0}^{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2r^2 \cos\varphi - 4r^3 \cos\varphi \sin\varphi\,d\varphi dr = \int_{r=0}^{3} [2r^2 \sin\varphi - 2r^3 \sin^2\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi}\,dr = 0$$

Potenciálkeresés

Ha van olyan u, hogy $\mathrm{grad}\;\mathrm{u} = \mathbf{v}$, akkor minden az értelmezési tartományba es?
G: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ t_1 \leq t \leq t_2$ görbére, ha $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ és $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$, akkor

$$\int_G \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1)$$

Mi az u, ha grad u = (yz,xz,xy)? Mi a grad u integrálja a (0,0,0) és (2,3,4) közötti egyenes szakaszon?

Komplex

Cauchy-féle integrálformulák

Az n-edik deriváltra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulák:

$$\oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

f reguláris, G az f értelmezési tartományában egyszer? görbe, egyszer hurkolja körül z_0-t.

Cauchy-tétel: Ha T a komplex számsík olyan tartománya, melynek határa a G egyszer? görbe (ez lehet véges sok diszjunkt görbe uniója is, azaz a T kontúrja véges sok zárt darabból) és a jobbkézszabály szerint van irányítva és az f komplex reguláris függvény a tartományt és a határát tartalmazó nyílt halmazon van értelmezve, akkor

$$\oint_G f(z)\,dz = 0$$

F.

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{(z^2+4)(z-1)^2}dz = ?$$

MO.: Szorzattá alakítjuk a nevez?t (ez mindig fog menni els?fokúk szorzatával, mert a komplex számok körében vagyunk!). Ábrázoljuk a görbét és a nevez? gyökhelyeit. Enélkül nem megy!

> $(z^2 + 4)(z - 1)^2 = (z - 2i)(z + 2i)(z - 1)^2$ gyökök: 1 (ez egy kettes multiplicitású gyök, mert kétszeres gyöke a nevez?nek), +2i, -2i (egyszeresek).

A $|\, z - i \,| = 2$ kör a 2 sugarú, i körüli kör, melyben a gyökök közül az 1 és a 2i van benne.

Legyen K_1 az 1 körüli 1/100 sugarú kör, K_2 a 2i körüli 1/100 sugarú kör. Az integrált a Cauchy-tétel alapján felbonthatjuk az integrandus K_1 és K_2 körüli integráljára.

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{(z^2+4)(z-1)^2}dz = \oint_{K_1} \frac{\frac{e^z}{z^2+4}}{(z-1)^2}dz + \oint_{K_2} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2i)}}{z-2i}dz =$$

Itt az els? integrálnál $\frac{e^z}{z^2+4}$ reguláris K -ben, a nevez? fokszáma 2, azaz az n=1-re vonatkozó Cauchy-formulát kell alkalmazni a $z_1 = 1$ ponttal, továbbá a második integrálnál $\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2i)}$ reguláris K_2-ben, $n = 0$ és $z_0 = 2i$.

$$= \frac{2\pi i}{1}\left(\frac{e^z}{z^2+4}\right)'\Bigg|_1 + \frac{2\pi i}{1}\,\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2i)}\Bigg|_{2i} = \frac{2\pi i}{1}\,\frac{e^z(z^2+4) - 2e^z z}{(z^2+4)^2}\Bigg|_1 + \frac{2\pi i}{1}\,\frac{e}{(z-1)}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{3e}{25} + \frac{e^{2i}}{4i(2i-1)^2}\right)$$

Harmonikus társ keresése

Mi a v, ha $u = x^2 - y^2 - e^x\cos y$ és f=u+iv reguláris.

Valós és képzetes rész kiszámítása

Mi a valós és képzetes része az $f(z) = 4(\mathrm{sh}(iz))^2$ függvénynek?

Komplex egyenlet

Mi a megoldása a $\sin z = i$ egyenletnek?

Komplex elemi függvény kiszámítása

Mi algebrai alakban $(1 + i)^i$