Tartalomjegyzék

Alterek

1. Igazolja, hogy ha W_1 és W_2 altér V-ben, akkor

$$W_1 \cap W_2 \text{ altér}$$

Ugyanis, ha u,v W_1 W_2, akkor u,v W_1 és u,v W_2, de ezek zártak az összeadásra és a számmal való szorzásra, ezért: u+v W_1 és u+v W_2,, azaz u+v W_1 W_2 és .u W_1 és .u W_2, azaz .u W_1 W_2,.

2. Igazoljuk, hogy ha W_1 és W_2 altér V-ben és W_1 W_2, ≠ {0}, akkor

$$\dim\langle W_1, W_2\rangle < \dim W_1 + \dim W_2$$

El?ször belátjuk, hogy

$$\dim\langle W_1, W_2\rangle \leq \dim W_1 + \dim W_2$$

ha B bázis W_1 -ben és C bázis W_2 -ben BUC generátorrendszere $\langle W_1, W_2\rangle$ -nek, de nem nagyobb a számossága, mint |B|+|C|

$$\dim\langle W_1, W_2\rangle \leq |BUC| \leq |B| + |C|$$

Most belátjuk, a szigorú egyenl?tlenséget. W_1 W_2 altér mindkét altérben, ezért ha a metszet nem 0, akkor egy D W_1 W_2 bázis kiegészíthet? W_1 bázisává és W_2 bázisává: B'UD és DUC'-vel. Feltehet?, hogy B' elemei különböznek C' elemeit?l, mert ha nem, akkor különböz?kkémeg nyújthatók.

$$\dim\langle W_1, W_2\rangle \leq |B'\cup D\cup C'| = |B'\cup D\cup D\cup C'| < |B'|+|D|+|D|+|C'| = \dim W_1+\dim$$

hiszen D elemeit kétszer számoltuk.

Egyenletrendszerek

1.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -3x + 2y - z &= 0 \\ -2x + y + az &= -1 \end{aligned}$$

Mo.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & a+2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{bmatrix}$$

Ax=b-nek pontosan akkor van megoldása, ha r(A)=r(A|b) (itt a r(A) az A mátrix rangja). r(A) az oszlopok által kifeszített altér dimenziója.

$$3 \leq r(A|b) \leq 3$$

hisz egyrészt csak háromemeletesek, másrészt van három független (1.,2.,4. oszlop). r(A)=3 pontosan akkor, ha a≠0. Ezesetben pedig valóban 1 megoldás van, mert det(A) ≠ 0.

Megoldás: x_0+Ker(A), Ker(A)={0}, mert A invertálható:

x_0=(1,2,1)

2.

$$\begin{aligned} &2x + 4y = -2 \\ &-y + z = 1 \\ &x + y + z = b \end{aligned}$$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{y}] \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Megoldhatóság: b=0

Megoldások száma: végtelen, mert dimKer(A)=3-dimIm(A)=3-2=1

Megoldások: inhomogén: (-1,0,1). Ker(A)={t(-2,1,1)}

Sajátértékfeladatok

1. Legyen **A** az x+2y=0 egyenesre tükrözés operátora. Számítsa ki az

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{2009} - \mathbf{A}^2 + \mathbf{I}$$

leképezés sajátértékeit és sajátvektorait!

A tükrözés, így páratlanadik hatványa önmaga, párosadik pedig az **I**. Emiatt B=A.

Mivel az egyenes: (1,2)· (x,y)=0 ezért az egyik sajátvektor az (1,2), ehhez a -1 sajátréték tarozik, a másik (2,-1), melyhez az 1.

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

határozzuk meg az $\mathbf{A}^{2009}$ sajátvektorait, sajátértékeit!

Ez egy y-x=0-be képez? projekció. Az {(1,1), (-1,1)} bázisról áttérés:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ennek inverze:

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Emiatt A a másik bázisban:

$$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ennek *n*-edik hatványa:

$$A'^n = \begin{pmatrix} 3^n & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú, emiatt a sajátértéke 3^{2009}, a sajátvektor pedig: (1,0), azaz a régi bázisban (1,1).

3. Határozzuk meg

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sajátvektorait, sajátértékeit!

Szimmetrikus, a karakterisztikus egyenlet:

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$$

Megoldása: -1, 3 Ezekhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

szinguláris mátrixok magjaiból egy-egy elem.

Mátrixegyenletek

1. Oldja meg X-re!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

A invertálható, így beszorozhatunk az inverzével:

$$X = A^{-1}B$$

Itt A-t meghatározhatjuk együttes Gauss-szal.

2. Oldja meg X-re!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

A nem invertálható. A megoldást szintén Gauss-szal kereshetjük. B és X els? oszlopait b-bel és x-szel jelölve: Ax=b-t kell megoldanunk, ha ez van és a másik oszlopokra is van, akkor ezeket összetéve adódik egy megoldás (ill. akár az összes is ha ezekez megfelel?en csoportosítjuk).