

Tartalomjegyzék

- 1 Intervallumos halmazos
- 2 Intervallumos halmazos gyakorló
 - ◆ 2.1 Intervallumokkal végzett műveletek
 - ◆ 2.2 Logaritmusos függvény értelmezési tartománya
- 3 Exponenciális egyenlet
- 4 Exponenciális egyenlet gyakorló
- 5 Logaritmikus egyenlet
- 6 Logaritmikus egyenlet gyakorló

Intervallumos halmazos

Legyen

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x\}$$

és B a

$$\log_2(x^2 - 9)$$

kifejezés értelmezési tartománya. Adja meg az

- a) $A \cap B$,
- b) $B \setminus A$,
- c) $A \setminus B$ és
- d) $A \cup B$.

halmazokat!

MO.: A

$$\log_2(x^2 - 9)$$

kifejezéssel kapcsolatban tudjuk, logaritmus mellett csak pozitív szám állhat, ezért

$$x^2 - 9 > 0$$

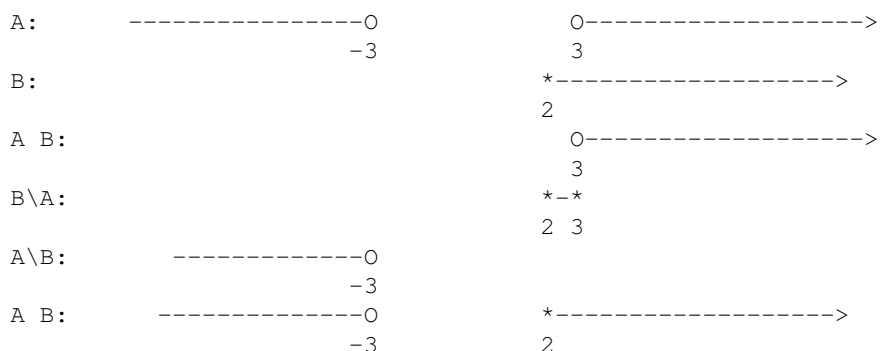
$x^2 - 9$ képe egy fölfelé nyitott parabola, $x = \pm 3$ gyökökkel, ezért ez a kifejezés $x < -3$ ill. $3 < x$ esetekben pozitív:

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -3 \text{ vagy } 3 < x\}$$

Ami kell:

- $A \cap B$ azaz A és B közös elemei,
- $B \setminus A$ B -ből kivéve A elemeit,
- $A \setminus B$ A -ból kivéve B elemeit,
- $A \cup B$ azok az elemek, amik A ill. B közül legalább az egyikben benne vannak.

halmazokat!



A grafikonokról a halmazok:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x\}, \\ B \setminus A &= \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}, \\ A \setminus B &= \{x \in \mathbf{R} \mid x < -3\} \text{ és} \\ A \cup B &= \{x \in \mathbf{R} \mid x < -3 \text{ vagy } 2 \leq x\}. \end{aligned}$$

viSSza

Intervallumos halmazos gyakorló

Intervallumokkal végzett műveletek

Legyen

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 3\}$$

és

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x\}$$

Adja meg az

- a) $A \cap B$,
- b) $B \setminus A$,
- c) $A \setminus B$ és
- d) $A \cup B$.

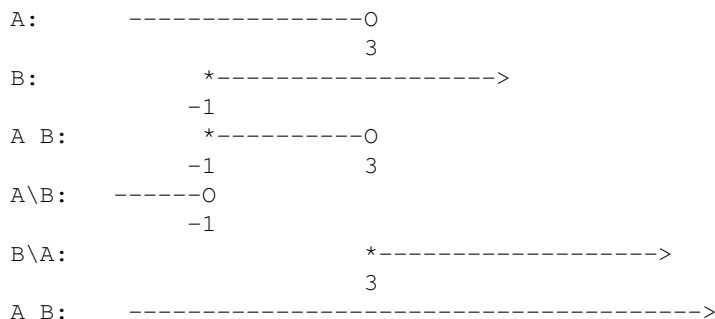
halmazokat!

MO.: Ami kell:

$$\begin{aligned} A \cap B & \text{ azaz } A \text{ és } B \text{ közös elemei,} \\ B \setminus A & \text{ } B\text{-ből kivéve } A \text{ elemeit,} \end{aligned}$$

$A \setminus B$ A -ból kivéve B elemeit,
 $A \cup B$ azok az elemek, amik A ill. B közül legalább az egyikben benne vannak.

halmazokat!



A grafikonokról a halmazok:

$$A \cap B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 3\},$$

$$B \setminus A = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 \leq x\},$$

$$A \setminus B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -1\} \text{ és}$$

$$A \cup B = \mathbf{R}.$$

Logaritmusos függvény értelmezési tartománya

Mi az

$$\log_5(x^2 + 4x + 3)$$

kifejezés értelmezési tartománya?

MO.: Logaritmus mellett csak pozitív szám állhat:

$$x^2 + 4x + 3 > 0$$

ez egy felfelé nyitott parabola és két zérushelye:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -1, \quad -3$$

Akkor pozitív a függvényérték, ha $x < -3$ vagy $-1 < x$:



vissza

Intervallumokkal végzett műveletek

Exponenciális egyenlet

Oldja meg az

$$3^{2x+1} + 8 \cdot 3^{x-1} - \frac{1}{3} = 0$$

egyenletet a valós számok halmazán!

MO.: Ha a kitevőben összeg van, akkor érdemes a hatványok közötti szorzatot felírni:

$$3^{2x} \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

3-mal beszorozva, hogy ne kelljen törtekkkel számolni:

$$9 \cdot 3^{2x} + 8 \cdot 3^x - 1 = 0$$

Itt felismerhetjük, hogy

$$3^{2x} = (3^x)^2$$

Bevezetve az

$$a = 3^x$$

új ismeretlent:

$$9 \cdot a^2 + 8 \cdot a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{18} = \frac{-8 \pm 10}{18} = \frac{1}{9}, \quad -1$$

Innen az új ismeretlent definiáló egyenletbe visszahelyettesítve, egyfelől:

$$-1 = 3^x$$

ami lehetetlen, továbbá:

$$\frac{1}{9} = 3^x$$

$$3^{-2} = 3^x$$

exp. sz. m.

$$-2 = x$$

Exponenciális egyenlet gyakorló

Oldja meg az

$$4^{x+\frac{1}{2}} + 4^{x-1} = \frac{9}{4}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

MO.: Ha a kitevőben összeg van, akkor érdemes a hatványok közötti szorzatot felírni:

$$4^x \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 4^x \cdot 4^{-1} = \frac{9}{4}$$

mivel $4^{\frac{1}{2}} = 2$ ezért kiemelve 4^x -t

$$4^x \left(2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{4}$$

azaz

$$4^x \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

azaz

$$4^x = 1$$

bármely szám nulladik hatvány 1,

$$4^x = 4^0$$

exp. sz. m.

$$x = 0$$

vissza

Logaritmikus egyenlet

Oldja meg a

$$2 \cdot \log_3(x + 4) = \log_3(5x + 12)$$

egyenletet a valós számok halmazán!

MO.: Kikötések:

$$x + 4 > 0$$

azaz

$$x > -4$$

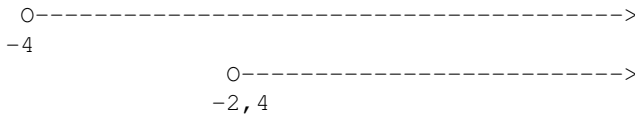
és

$$5x + 12 > 0$$

azaz

$$x > -\frac{12}{5} = -2,4$$

Számegyenesen ábrázolva:



A közös rész:



azaz

$$x > -\frac{12}{5} = -2,4$$

$$2 \cdot \log_3(x + 4) = \log_3(5x + 12)$$

a 2-t bevihetjük a logaritmus mellett álló kifejezés kitevőjébe az alábbi azonosság alapján:

$$n \cdot \log_a x = \log_a x^n$$

(ahol $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$). Tehát:

$$\log_3(x + 4)^2 = \log_3(5x + 12)$$

hivatkozva szigorú monotonításra, elhagyható a logaritmus:

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 &= 5x + 12 \\ x^2 + 8x + 16 &= 5x + 12 \\ x^2 + 3x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

aminek a gyökei a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$-3 \text{ és } -1$$

A -1 megoldás, mert behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3(-1 + 4) &= 2 \cdot \log_3 3 = 2 \\ \log_3(-5 + 12) &= \log_3 9 = 2 \end{aligned}$$

De a -3 nem megoldás, mert ekkor a jobb oldal nincs értelmezve

$$\log_3((-3)^5 + 12) = \log_3(-3)$$

viSSza

Logaritmikus egyenlet gyakorló

Oldja meg az

$$\lg(x + 2) + \lg(x + 1) = \lg 20$$

egyenletet a valós számok halmazán!

MO.: Kikötések:

$$x + 2 > 0$$

azaz

$$x > -2$$

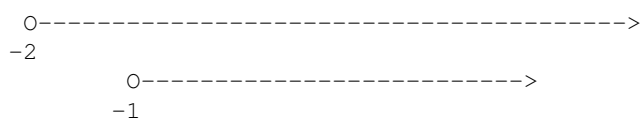
és

$$x + 1 > 0$$

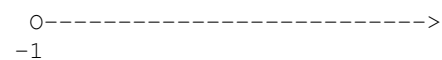
azaz

$$x > -1$$

Számegyenesen ábrázolva:



A közös rész:



azaz

$$x > -1$$

$$\lg(x + 2) + \lg(x + 1) = \lg 20$$

a két tízes alapú logaritmust egyesíthetjük az alábbi azonosság alapján:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \quad (\text{ahol } x, y > 0, a > 0, a \neq 1)$$

tehát:

$$\lg(x + 2)(x + 1) = \lg 20$$

hivatkozva a szigorú monotonitásra, elhagyható a logaritmus:

$$(x + 2)(x + 1) = 20$$

$$x^2 + 3x + 2 = 20$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

aminek a gyökei a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

-6 és 3

amelyek közül a -6 nem felel meg az $x > -1$ kikötésnek, de a 3 megoldás, mert:

$$\lg(3 + 2) + \lg(3 + 1) = \lg 5 + \lg 4 = \lg 5 \cdot 4 = \lg 20$$

vissza