Tartalomjegyzék

Intervallumos halmazos

Legyen

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \le x\}$$

és B a

$$\log_2(x^2 - 9)$$

kifejezés értelmezési tartománya. Adja meg az

a) $A \cap B$,
b) $B \setminus A$,
c) $A \setminus B$ és
d) $A \cup B$.

halmazokat!

MO.: A

$$\log_2(x^2 - 9)$$

kifejezéssel kapcsolatban tudjuk, logaritmus mellett csak pozitív szám állhat, ezért

$$x^2 - 9 > 0$$

$x^2 - 9$ képe egy fölfelé nyitott parabola, $x = \pm 3$ gyökökkel, ezért ez a kifejezés $x < -3$ ill. $3 < x$ esetekben pozitív:

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -3 \text{ vagy } 3 < x\}$$

Ami kell:

$A \cap B$ azaz *A* és *B* közös elemei,
$B \setminus A$ *B*-b?l kivéve *A* elemeit,
$A \setminus B$ *A*-ból kivéve *B* elemeit,
$A \cup B$ azok az elemek, amik *A* ill. *B* közül legalább az egyikben benne vannak.

halmazokat!

```
A:      ----------------O             O-------------------->
                       -3             3
B:                                  *-------------------->
                                    2
A B:                                  O-------------------->
                                      3
B\A:                                *-*
                                    2 3
A\B:       -------------O
                       -3
A B:      --------------O           *-------------------->
                       -3           2
```

A grafikonokról a halmazok:

$A \cap B = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x\}$,
$B \setminus A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$,
$A \setminus B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -3\}$ és
$A \cup B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -3 \text{ vagy } 2 \leq x\}$.

vissza

Intervallumos halmazos gyakorló

Intervallumokkal végzett m?veletek

Legyen

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 3\}$$

és

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x\}$$

Adja meg az

a) $A \cap B$,
b) $B \setminus A$,
c) $A \setminus B$ és
d) $A \cup B$.

halmazokat!

MO.: Ami kell:

$A \cap B$ azaz *A* és *B* közös elemei,
$B \setminus A$ *B*-b?l kivéve *A* elemeit,

$A \setminus B$ *A*-ból kivéve *B* elemeit,
$A \cup B$ azok az elemek, amik *A* ill. *B* közül legalább az egyikben benne vannak.

halmazokat!

```
A:       ----------------O
                         3
B:           *------------------->
            -1
A B:         *----------O
            -1          3
A\B:    ------O
             -1
B\A:                    *------------------->
                        3
A B:     ---------------------------------------->
```

A grafikonokról a halmazok:

$A \cap B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 3\}$,
$B \setminus A = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 \leq x\}$,
$A \setminus B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -1\}$ és
$A \cup B = \mathbf{R}$.

Logaritmusos függvény értelmezési tartománya

Mi az

$$\log_5(x^2 + 4x + 3)$$

kifejezés értelmezési tartománya?

MO.: Logaritmus mellett csak pozitív szám állhat:

$$x^2 + 4x + 3 > 0$$

ez egy felfelé nyitott parabola és két zérushelye:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \qquad -1, \qquad -3$$

Akkor pozitív a függvényérték, ha *x* < – 3 vagy – 1 < *x*:

```
----------------O              O-------------------->
               -3             -1
```

vissza

Exponenciális egyenlet

Oldja meg az

$$3^{2x+1} + 8 \cdot 3^{x-1} - \frac{1}{3} = 0$$

egyenletet a valós számok halmazán!

MO.: Ha a kitev?ben összeg van, akkor érdemes a hatványok közötti szorzatot felírni:

$$3^{2x} \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

3-mal beszorozva, hogy ne kelljen törtekkel számolni:

$$9 \cdot 3^{2x} + 8 \cdot 3^x - 1 = 0$$

Itt felismerhetjünk, hogy

$$3^{2x} = (3^x)^2$$

Bevezetve az

$$a = 3^x$$

új ismeretlent:

$$9 \cdot a^2 + 8 \cdot a - 1 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{18} = \frac{-8 \pm 10}{18} = \qquad \frac{1}{9}, \qquad -1$$

Innen az új ismeretlent definiáló egynletbe visszahelyettesítve, egyfel?l:

$$-1 = 3^x$$

ami lehetetlen, továbbá:

$$\frac{1}{9} = 3^x$$
$$3^{-2} = 3^x$$

exp. sz. m.

$$-2 = x$$

Exponenciális egyenlet gyakorló

Oldja meg az

$$4^{x+\frac{1}{2}} + 4^{x-1} = \frac{9}{4}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

MO.: Ha a kitev?ben összeg van, akkor érdemes a hatványok közötti szorzatot felírni:

$$4^x \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 4^x \cdot 4^{-1} = \frac{9}{4}$$

mivel $4^{\frac{1}{2}} = 2$ ezért kiemelve 4^x-t

$$4^x \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

azaz

$$4^x \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

azaz

$$4^x = 1$$

bármely szám nulladik hatvány 1,

$$4^x = 4^0$$

exp. sz. m.

$$x = 0$$

vissza

Logaritmikus egyenlet

Oldja meg a

$$2 \cdot \log_3(x+4) = \log_3(5x+12)$$

egyenletet a valós számok halmazán!

MO.: Kikötések:

$$x + 4 > 0$$

azaz

$$x > -4$$

és

$$5x + 12 > 0$$

azaz

$$x > -\frac{12}{5} = -2,4$$

Számegyenesen ábrázolva:

```
 O--------------------------------------->
-4
                          O------------------------->
                        -2,4
```

A közös rész:

```
                          O------------------------->
                        -2,4
```

azaz

$$x > -\frac{12}{5} = -2,4$$

$$2 \cdot \log_3(x+4) = \log_3(5x+12)$$

a 2-t bevihetjük a logaritmus mellett álló kifejezés kitev?jébe az alábbi azonosság alapján:

$$n \cdot \log_a x = \log_a x^n$$

(ahol *x* > 0, *a* > 0, *a*≠1). Tehát:

$$\log_3(x+4)^2 = \log_3(5x+12)$$

hivatkozva szigorú monotonitásra, elhagyható a logaritmus:

$$(x+4)^2 = 5x + 12$$
$$x^2 + 8x + 16 = 5x + 12$$
$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

aminek a gyökei a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

-3 és -1

A -1 megoldás, mert behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$2 \cdot \log_3(-1+4) = 2 \cdot \log_3 3 = 2$$
$$\log_3(-5+12) = \log_3 9 = 2$$

De a -3 nem megoldás, mert ekkor a jobb oldal nincs értelmezve

$$\log_3((-3)5+12)=\log_3(-3)$$

vissza

Logaritmikus egyenlet gyakorló

Oldja meg az

$$\lg(x+2)+\lg(x+1)=\lg 20$$

egyenletet a valós számok halmazán!

MO.: Kikötések:

$$x+2>0$$

azaz

$$x>-2$$

és

$$x+1>0$$

azaz

$$x>-1$$

Számegyenesen ábrázolva:

```
 O--------------------------------------->
-2
        O------------------------->
       -1
```

A közös rész:

```
        O------------------------->
       -1
```

azaz

$$x>-1$$

$$\lg(x+2)+\lg(x+1)=\lg 20$$

a két tízes alapú logaritmust egyesíthetjük az alábbi azonosság alapján:

$$\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$$ (ahol $x,y>0$, $a>0$, $a\neq 1$)

tehát:

$$\lg(x+2)(x+1) = \lg 20$$

hivatkozva a szigorú monotonitásra, elhagyható a logaritmus:

$$(x+2)(x+1) = 20$$
$$x^2 + 3x + 2 = 20$$
$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

aminek a gyökei a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

-6 és 3

amelyek közül a -6 nem felel meg az $x > -1$ kikötésnek, de a 3 megoldás, mert:

$$\lg(3+2) + \lg(3+1) = \lg 5 + \lg 4 = \lg 5 \cdot 4 = \lg 20$$

vissza