

Adjungált

Ez a szócikk a mátrixok inverzének kiszámításánál szereplő adjungált mennyiségről szól, vagyis a klasszikus adjungáltról. A komplex algebra adjungáltfogalma, vagyis a konjugált transzponáltat máshol kell keresni.

A lineáris algebrában egy négyzetes mátrix **adjungáltjának** nevezzük a mátrix elejéles aldeterminánsaiból alkotott mátrix transzponáltját. Az adjungálás tehát a négyzetes mátrixokon értelmezett operáció, mely mátrixhoz mátrixot rendel. Legfontosabb alkalmazása, hogy segítségével tömör formában fejezhetők ki egy invertálható mátrix inverze.

Tartalomjegyzék

- 1 Definíció
- 2 Példa
 - ◆ 2.1 Aldetermináns-mátrix
 - ◆ 2.2 Elejéles aldetermináns-mátrix
 - ◆ 2.3 Transzponált
- 3 Adjungált-képlet
- 4 Tulajdonságok
- 5 Külső hivatkozások

Definíció

Egy A kvadratikusan (négyzetes, azaz $n \times n$ -es) mátrix adjungáltján a következő eljárással elkészített mátrixot értjük:

1. felírjuk az A mátrix *aldeterminánsmátrixát* vagy *minormátrixát*, vagyis azt az $A^{\min}$ mátrixot, melynek i, j -edik eleme annak a mátrixnak a determinánsa, melyet az A i -edik sorának és j -edik oszlopának törlésével keletkezik;
2. az $A^{\min}$ mátrix elemeinek elejét a sakktáblaszabály szerint megváltoztatjuk, azaz az i, j -edik elemnek a $(-1)^{i+j}$ értéket adjuk, ekkor nyerjük az *elejéles aldeterminánsmátrixot*, azaz a $(A^{\min})^{\pm}$ mátrixot;
3. majd ezt a mátrixot *transzponáljuk*, azaz elemeit a fölértékre tükrözzük: $((A^{\min})^{\pm})^T$

Így kapjuk az

$$\text{adj}(A) \text{-val}$$

jelölt **adjungált mátrixot**.

Az adjungált mátrix definíciójának értelmét az inverz mátrix kiszámítására vonatkozó tétel bizonyításában keressük!

Példa

Legyen A a következő négyzetes mátrix:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Aldetermináns-mátrix

Készítsük el az aldeterminánsmátrixot, azaz a minormátrixot! Az $A^{\min}$ mátrix elemeit $?$ a ♣ helyen álló elemet $?$ tehát úgy kapjuk az A elemeiből, hogy az i -edik sort és j -edik oszlopot töröljük (ezek a □ helyek) és a maradék mátrix determinánsát számítjuk ki. Az aldetermináns mátrix elemei a következő determinánsok lesznek:

$$A^{\min} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \clubsuit & \square & \square \\ \square & -1 & 1 \\ \square & 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \square & \clubsuit & \square \\ 2 & \square & 1 \\ -1 & \square & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \square & \square & \clubsuit \\ 2 & -1 & \square \\ -1 & 0 & \square \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \square & -2 & 1 \\ \clubsuit & \square & \square \\ \square & 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \square & 0 \\ \square & \clubsuit & \square \\ -1 & \square & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 & \square \\ \square & \square & \clubsuit \\ -1 & 0 & \square \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \square & -2 & 0 \\ \square & -1 & 1 \\ \clubsuit & \square & \square \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \square & 0 \\ 2 & \square & 1 \\ \square & \clubsuit & \square \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 & \square \\ 2 & -1 & \square \\ \square & \square & \clubsuit \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Tehát a 2x2-es determinánsok kiszámítása után:

$$A^{\min} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Eljeles aldetermináns-mátrix

A ♣sakkéle szabály alapján a következő formális mátrix mutatja, hogy hol kell megváltoztatni az eljelet ($?$) és hol nem ($+$)

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots & \pm \\ - & + & - & & \mp \\ + & - & + & \dots & \pm \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm & \mp & \pm & \dots & + \end{bmatrix}$$

Tehát

$$(A^{\min})^{\pm} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Transzponált

A transzponálás, a mátrix elemeinek a főátlóra történő tükrözése: az első sorból lesz az első oszlop, a második sorból a második oszlop, ... Tetszőleges kvadrátikus mátrixnál tehát ez az operáció:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Így az adjungált:

$$\text{adj } A = ((A^{\text{min}})^{\pm})^T = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Adjungált-képlet

A Caley-Hamilton-tétel következményeként egy mátrix gyöke saját karakterisztikus polinomjának. Ezekben a polinomokban a konstans tag mindig a mátrix determinánsa, így (invertálható esetben) az inverzmátrixal történő beszorzás után, ebből a konstans tagból a $\det(A) \cdot A^{-1} = \text{adj}(A)$ mátrixot kapjuk. A karakterisztikus egyenlet változójának helyére az A mátrixot helyettesítve és az inverzel beszorozva tehát kifejezhető az adjungált. Sőt, ez az így nyert formula szinguláris mátrix esetén is fennáll. Ez a formula a 2x2-es esetben:

$$\text{adj } A = -A + \text{trace}(A) \cdot I,$$

a 3x3-as esetben pedig

$$\text{adj } A = -A^2 + \text{trace}(\text{adj } A) \cdot A - \text{trace}(A) \cdot I.$$

Tulajdonságok

$$\text{adj}(I) = I$$

$$\text{adj}(AB) = \text{adj}(B) \text{adj}(A)$$

$$\text{adj}(A^T) = \text{adj}(A)^T$$

$$\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$$

Külső hivatkozások

- [PlanetMath: adjugate](#)
- [hu.wikiédia Adjungált \(mátrixinvertálás\)](#)